

Tema 3: Análisis en el dominio de la frecuencia

Enrique San Andrés



Objetivos del tema

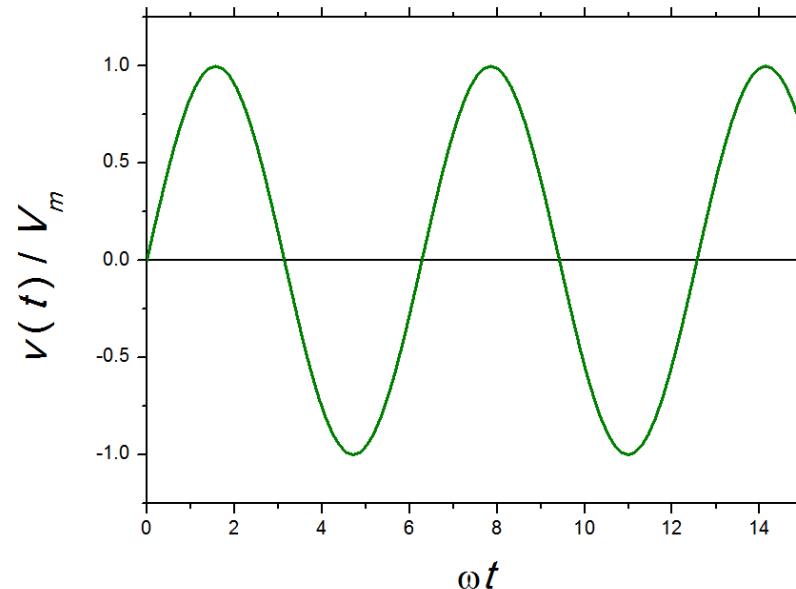
- Analizaremos la respuesta de los circuitos lineales frente a excitaciones sinusoidales
 - Fasores – impedancias
 - Potencia compleja
 - Circuitos resonantes
 - Fundamentos de filtrado de señales

Programa de la asignatura

1. Elementos de un circuito y métodos de análisis en corriente continua: Resistencias, fuentes de voltaje y de corriente, fuentes dependientes. Leyes de Kirchhoff. Técnicas de análisis: combinación de elementos, análisis por nodos, análisis por mallas, principio de superposición, teoremas de Thévenin y Norton. El amplificador operacional ideal. Circuitos simples con amplificadores operacionales. Análisis de circuitos asistido por ordenador.
2. Análisis en el dominio del tiempo: Respuesta transitoria de circuitos con condensadores e inductancias. Circuitos de primer y segundo orden.
3. Análisis en el dominio de la frecuencia: Excitación sinusoidal. Fasores. Impedancia. Potencia compleja. Resonancia. Introducción al filtrado de señales.
4. Redes bipuerto: parámetros generales y transformaciones. Inductancias acopladas magnéticamente. Transformador lineal. Transformador ideal.
5. Introducción a los circuitos no lineales.

Análisis en régimen sinusoidal

- Vamos a estudiar respuesta con fuentes variables con el tiempo **sinusoidales**
 - Denominación habitual: corriente alterna (AC)
- Razones para estudiar este tipo de excitación y no exponencial, lineal, triangular...
 - 1.- Aparece naturalmente en un sistema resonante amortiguado (sistema de 2º orden)
 - 2.- Aparece en solución de ecuaciones diferenciales
 - Derivada de sen $\rightarrow$ cos
 - Derivada de cos $\rightarrow$ -sen



Análisis en régimen sinusoidal

- 3.- Los generadores típicos utilizan una espira que gira a velocidad angular uniforme y un imán permanente (o viceversa)
 - Producen una tensión que es una senoide

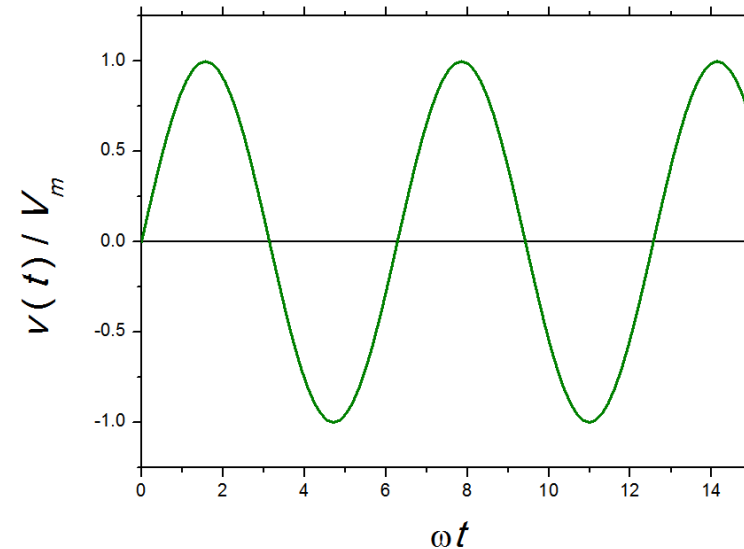
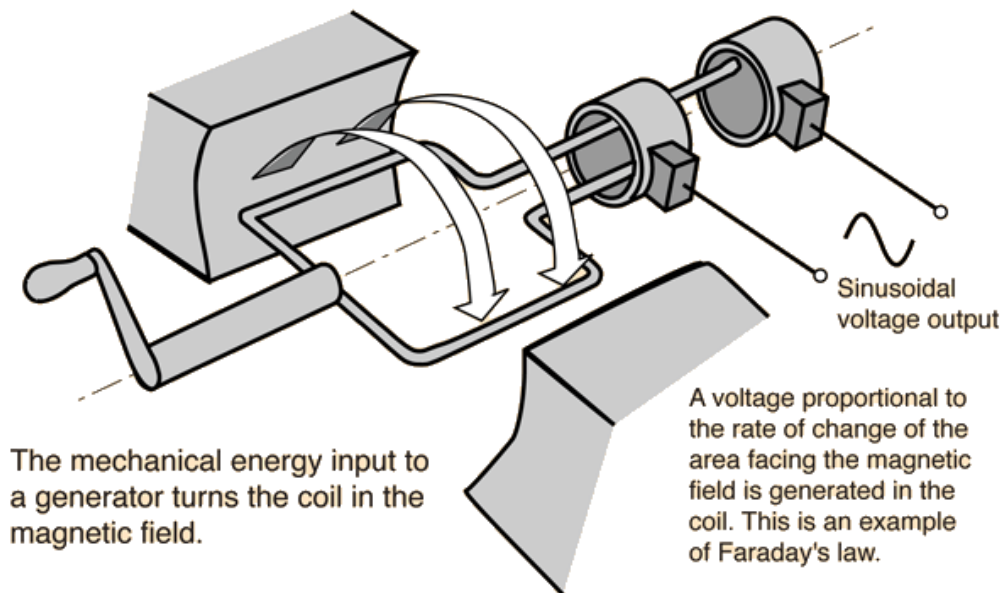


Imagen: hyperphysics.phy-astr.gsu.edu

Análisis en régimen sinusoidal

- 4.-**Toda función periódica puede descomponerse en sinusoides: series de Fourier**
 - Permite pasar del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia
 - Sin rigor: toda función periódica se puede expresar como una suma de sinusoidales con frecuencia múltiplo de la frecuencia de la señal



Fuente: Lucas V. Barbosa
– Wikimedia commons

- <https://www.youtube.com/watch?v=DzjwjDt2W1I>



Transformada de Fourier

- Cálculo de la serie de Fourier de una señal periódica

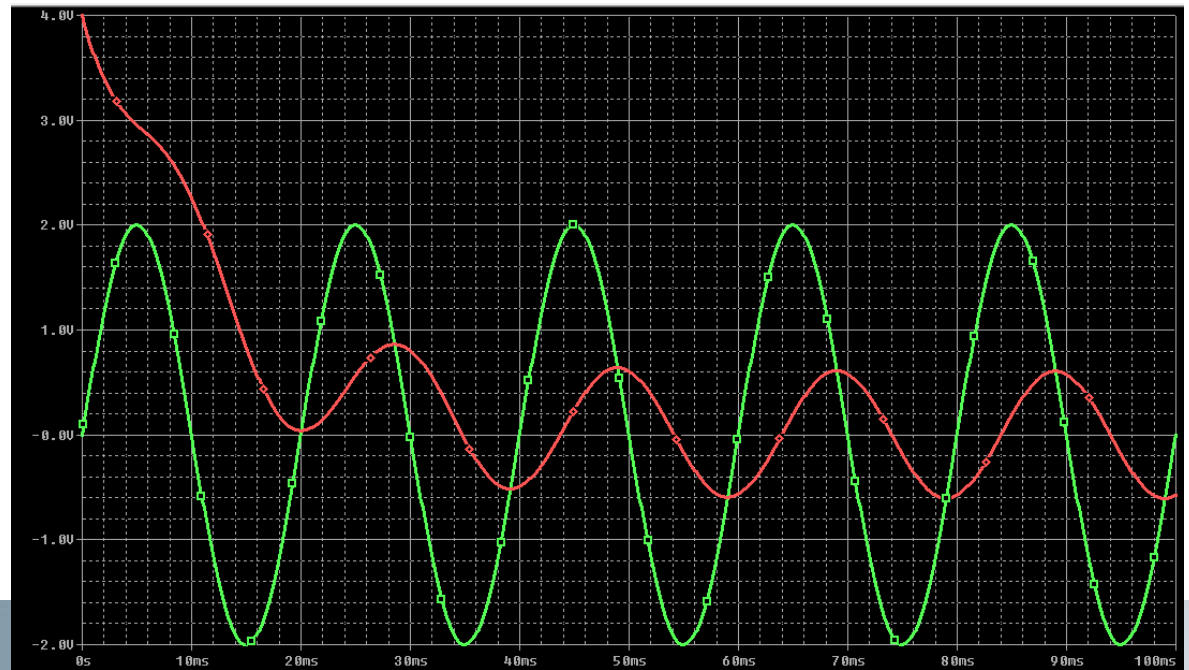
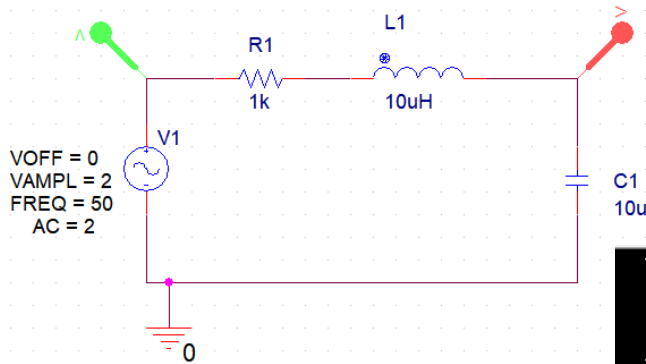
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \right]$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt;$$

- Permite describir completamente una función periódica mediante un conjunto discreto de valores (amplitudes de cada uno de los términos periódicos) -> espectro discreto de frecuencias
- Las series de Fourier pueden extenderse a señales aperiódicas -> **Transformada de Fourier**

Análisis en régimen sinusoidal

- Un generador AC se conecta en un determinado momento: respuesta transitoria + forzada
 - Nos centraremos en el estacionario (respuesta forzada)

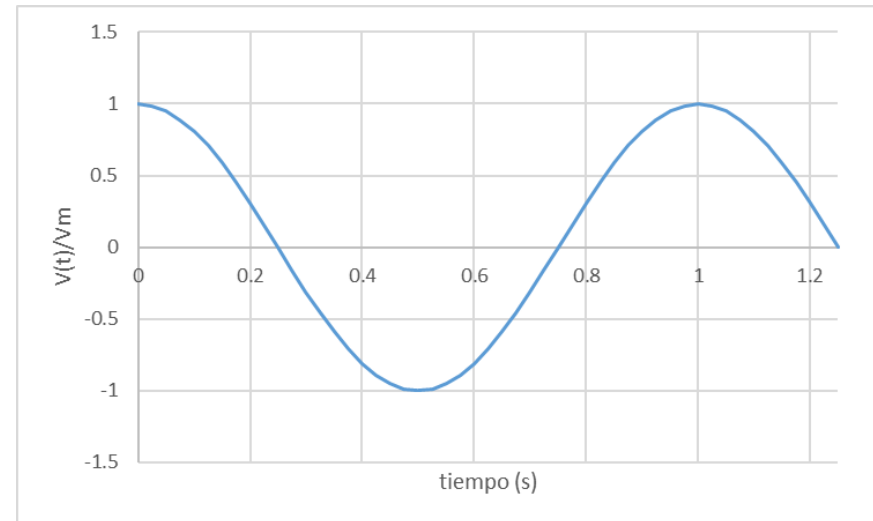


Análisis en régimen sinusoidal

- Generador AC de tensión:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t)$$

- V_m : amplitud de pico
- ωt argumento o fase [rad] o [°]
- ω frecuencia angular [rad/s]
- $T = 2\pi/\omega$ periodo [s]
- $f = 1/T$ frecuencia temporal [s⁻¹]



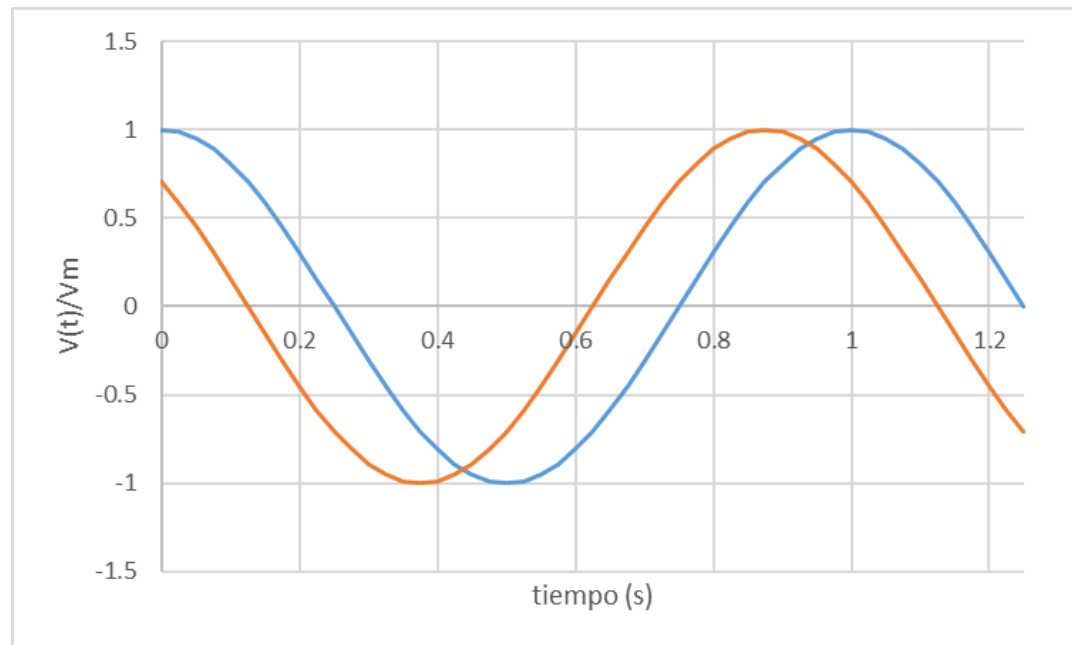
Análisis en régimen sinusoidal

- Fuente de tensión desfasada:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_0)$$

- ϕ_0 es la fase inicial

- Si ϕ_0 es positiva la señal está adelantada
 - Si ϕ_0 es negativa está atrasada



Análisis en régimen sinusoidal

- La elección de senos o cosenos es arbitraria

$$\operatorname{sen}(\varphi) = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(\varphi) = \operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

- Recordatorio

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen}(A)\cos(B) \pm \cos(A)\operatorname{sen}(B)$$

$$\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B)$$

- Ej: determinar amplitud, fase inicial, periodo y frecuencia

$$v(t) = 12 \cos(50t + 10^\circ)$$



Análisis en régimen sinusoidal

- Ej: calcular diferencia de fase entre las tensiones

$$v_1(t) = -10 \cos(\omega t + 50^\circ); \quad v_2(t) = 12 \operatorname{sen}(\omega t - 10^\circ)$$



Análisis en régimen sinusoidal

- Respuesta en alterna del circuito RL

$$v_s(t) = V_m \cos(\omega t)$$

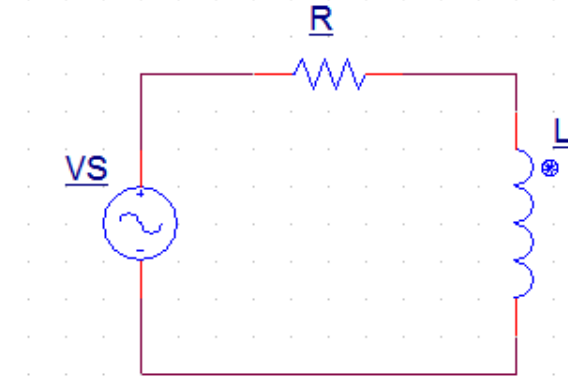
- Aplicando KVL

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_m \cos(\omega t)$$

- Ecuación diferencial lineal de primer orden: como solución particular vamos a probar una senoide de la misma frecuencia
 - Veremos que todas las corrientes y tensiones del circuito son sinusoidales de la misma frecuencia que la fuente
- Por tanto la solución particular (forzada) sería

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_0)$$

- La solución homogénea será una exponencial decreciente

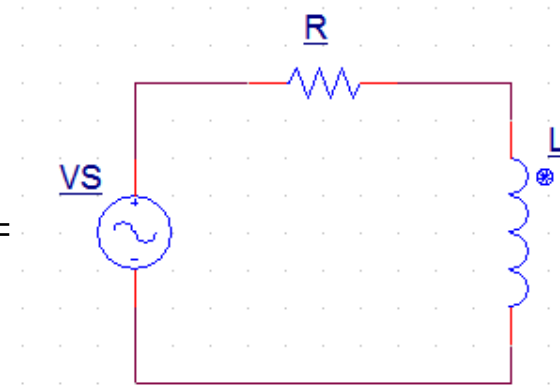


Análisis en régimen sinusoidal

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_0)$$

- Para separar incógnitas

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \cos(\omega t + \phi_0) = I_m [\cos(\omega t) \cos(\phi_0) - \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\phi_0)] = \\ &= A \cos(\omega t) + B \text{sen}(\omega t) \end{aligned}$$



- Relaciones entre incógnitas

$$\left. \begin{aligned} A &= I_m \cos(\phi_0) \\ B &= -I_m \text{sen}(\phi_0) \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \phi_0 &= -\tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) \\ I_m &= \sqrt{A^2 + B^2} \end{aligned}$$

- Determinación de A y B

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_m \cos(\omega t) \Rightarrow$$

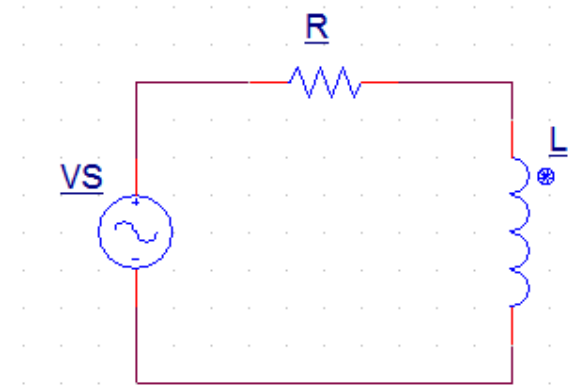
$$R(A \cos(\omega t) + B \text{sen}(\omega t)) + L(-A\omega \text{sen}(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)) = V_m \cos(\omega t)$$

Análisis en régimen sinusoidal

- Determinación de A y B

$$(RA + LB\omega) \cos(\omega t) + (RB - AL\omega) \sin(\omega t) = V_m \cos(\omega t)$$

$$\left. \begin{array}{l} RA + \omega LB = V_m \\ RB - \omega LA = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \frac{RV_m}{R^2 + (\omega L)^2} \\ B = \frac{\omega LV_m}{R^2 + (\omega L)^2} \end{array}$$



- Empleando relaciones anteriores

$$\left. \begin{array}{l} \phi_0 = -\tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \\ I_m = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \end{array} \right\} i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$$

Análisis en régimen sinusoidal

- Herramienta matemática para simplificar: *fasor*
- Definición de **fasor**:
 - Número complejo que representa la amplitud y la fase de una señal sinusoidal

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) \equiv \tilde{V} = V_m e^{j\varphi}$$

- No contiene información de la frecuencia
- Transforma ED en operaciones algebraicas con complejos



Análisis en régimen sinusoidal

- Recordatorio de operaciones con complejos

$$z = x + jy = r_{\phi} = r(\cos \phi + j \operatorname{sen} \phi) = r e^{j\phi}; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

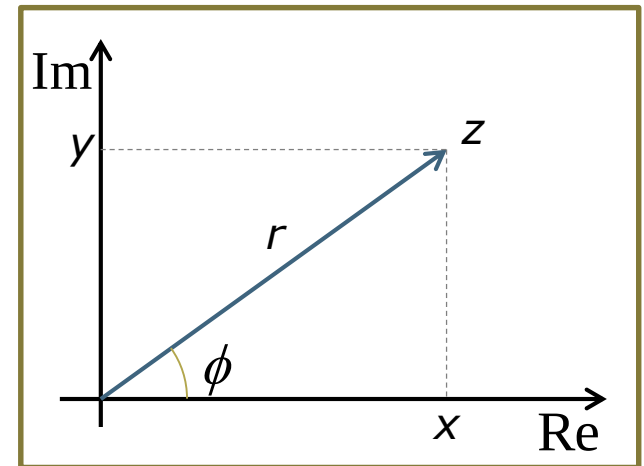
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2)_{\phi_1 + \phi_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)_{\phi_1 - \phi_2}$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}_{\phi/2}$$

$$z^* = x - jy = r_{-\phi}$$



$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta; \quad j = \sqrt{-1}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \operatorname{Re}[e^{j\theta}] \\ \operatorname{sen} \theta = \operatorname{Im}[e^{j\theta}] \end{cases}$$

Análisis en régimen sinusoidal

- Si la señal es $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$

– Entonces

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}[V_m e^{j(\omega t + \phi)}] = \operatorname{Re}[V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\tilde{V} e^{j\omega t}]$$

donde $\tilde{V} = V_m e^{j\phi}$

- El uso de fasores sirve para trabajar en el dominio de la frecuencia en lugar de en el dominio del tiempo (dominio fasorial)
- Resumiendo:

- Paso al dominio del tiempo conocido el fasor:

$$v(t) = \operatorname{Re}[\tilde{V} e^{j\omega t}]$$

- Paso al dominio fasorial desde el dominio del tiempo

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow \tilde{V} = V_m e^{j\phi}$$



Análisis en régimen sinusoidal

- Ej: sumar en el dominio fasorial las corrientes

$$i_1(t) = 4 \cos(\omega t + 30^\circ)$$

$$i_2(t) = 5 \operatorname{sen}(\omega t - 20^\circ)$$



Análisis en régimen sinusoidal

- Supongamos una tensión general $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$
- Derivación

- En el dominio del tiempo

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\omega V_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \omega V_m \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

- Representación fasorial del resultado

$$\omega V_m e^{j\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega V_m e^{j\phi} e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega \tilde{V}$$

- En conclusión

- Dominio del tiempo

Dominio de la frecuencia

$$\boxed{\frac{dv}{dt} \leftrightarrow j\omega \tilde{V}}$$

Análisis en régimen sinusoidal

- Integración

$$\int v(t) dt = \int V_m \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{V_m}{\omega} \text{sen}(\omega t + \varphi) = \frac{V_m}{\omega} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{V_m}{\omega} e^{j\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{V_m}{j\omega} e^{j\varphi} = \frac{\tilde{V}}{j\omega}$$

$$\boxed{\int v dt \leftrightarrow \frac{\tilde{V}}{j\omega}}$$

Análisis en régimen sinusoidal

- Supongamos una tensión general $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$
- Derivación

- Dominio del tiempo

Dominio de la frecuencia

$$\boxed{\frac{dv}{dt} \leftrightarrow j\omega \tilde{V}}$$

- Integración

- Dominio del tiempo

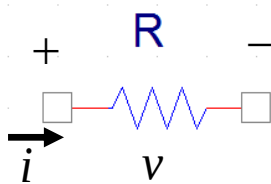
Dominio de la frecuencia

$$\boxed{\int v dt \leftrightarrow \frac{\tilde{V}}{j\omega}}$$

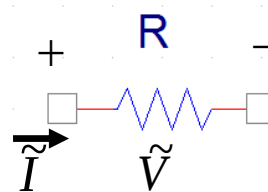
Relaciones fasoriales para R, L y C

- Resistencia

- Dominio del tiempo



- Dominio de la frecuencia



- Supongamos que

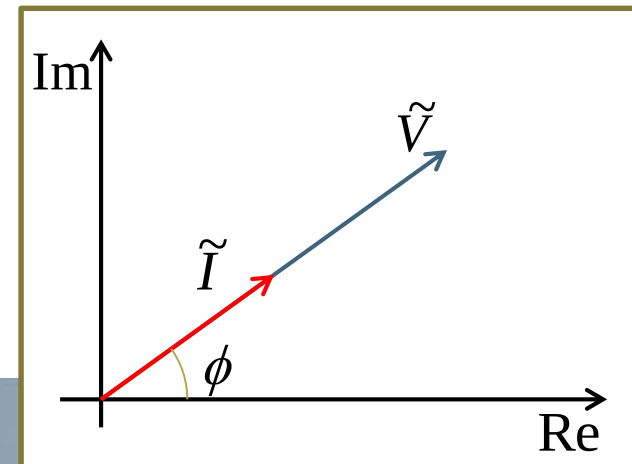
$$i = I_m \cos(\omega t + \phi) \longrightarrow \tilde{I} = I_m e^{j\phi}$$

- Ley de Ohm

$$v = Ri$$

$$v = RI_m \cos(\omega t + \phi) \longrightarrow \tilde{V} = RI_m e^{j\phi}$$

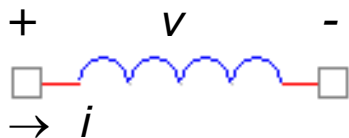
$$\tilde{V} = R\tilde{I}$$



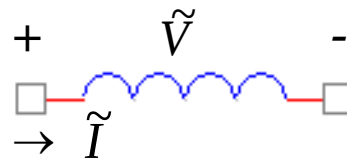
Relaciones fasoriales para R, L y C

- Inductancia

- Dominio del tiempo



- Dominio de la frecuencia



- Supongamos que

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi) \longrightarrow \tilde{I} = I_m e^{j\phi}$$

- Relación v-i

$$v = L \frac{di}{dt}$$

$$v = -\omega L I_m \sin(\omega t + \phi) =$$

$$= \omega L I_m \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= \omega L I_m e^{j\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)} = \\ &= j\omega L I_m e^{j\phi} \end{aligned}$$

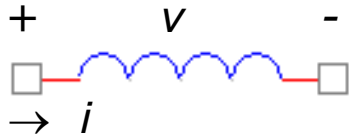
$$\tilde{V} = j\omega L \tilde{I}$$



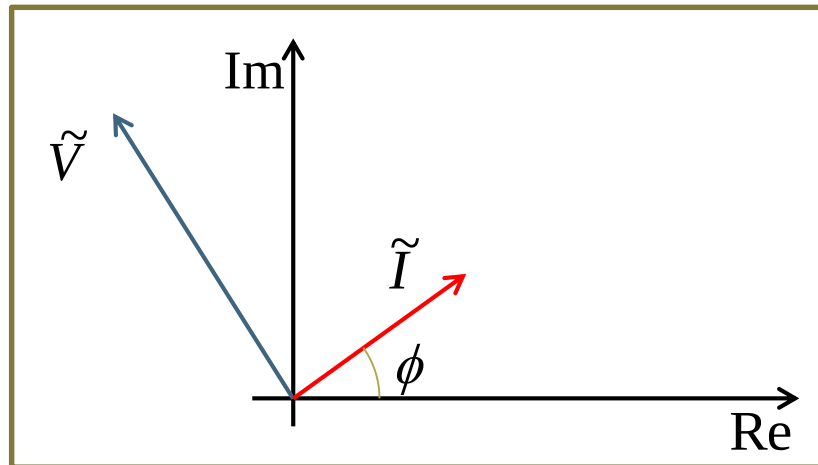
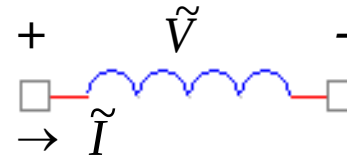
Relaciones fasoriales para R, L y C

- Bobina

- Dominio del tiempo



- Dominio de la frecuencia



$$\tilde{V} = j\omega L \tilde{I}$$

- La corriente se retrasa 90° respecto de la tensión

Relaciones fasoriales para R, L y C

- Condensador

- Dominio del tiempo

- Dominio de la frecuencia

- Supongamos que

$$v = V_m \cos(\omega t + \phi) \longrightarrow \tilde{V} = V_m e^{j\phi}$$

- Relación i - v

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

$$i = -\omega C V_m \sin(\omega t + \phi) =$$

$$= \omega C V_m \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow$$

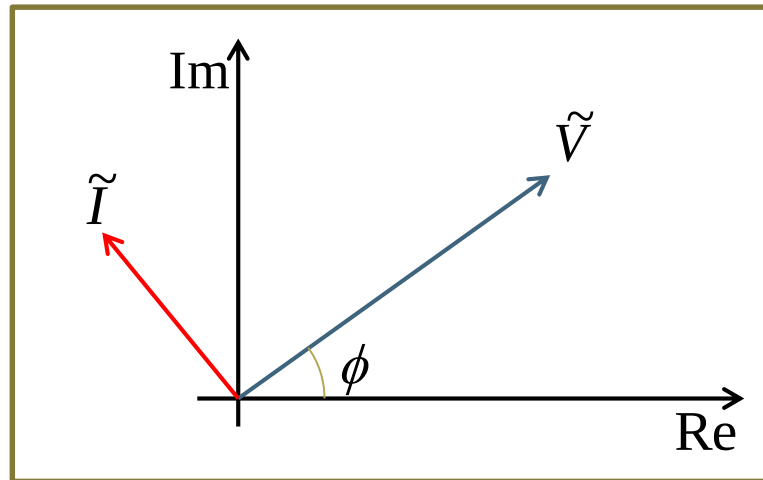
$$\begin{aligned} \tilde{I} &= \omega C V_m e^{j\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)} = \\ &= j\omega C V_m e^{j\phi} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{I} &= j\omega C \tilde{V} \\ \tilde{V} &= \frac{1}{j\omega C} \tilde{I} \end{aligned} \right\}$$



Relaciones fasoriales para R, L y C

- Condensador



$$\tilde{I} = j\omega C \tilde{V}$$
$$\tilde{V} = \frac{1}{j\omega C} \tilde{I}$$

- La corriente se adelanta 90° respecto de la tensión

Impedancia

- Acabamos de encontrar las relaciones entre los fasores corriente y tensión para R, L y C

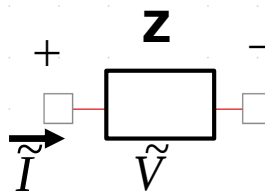
- Expresiones

$$\tilde{V} = R\tilde{I} \quad \tilde{V} = j\omega L\tilde{I} \quad \tilde{V} = \frac{1}{j\omega C}\tilde{I}$$

- Def. **Impedancia (Z)**

- Es la relación entre la tensión fasorial y la corriente fasorial

$$Z = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}}$$



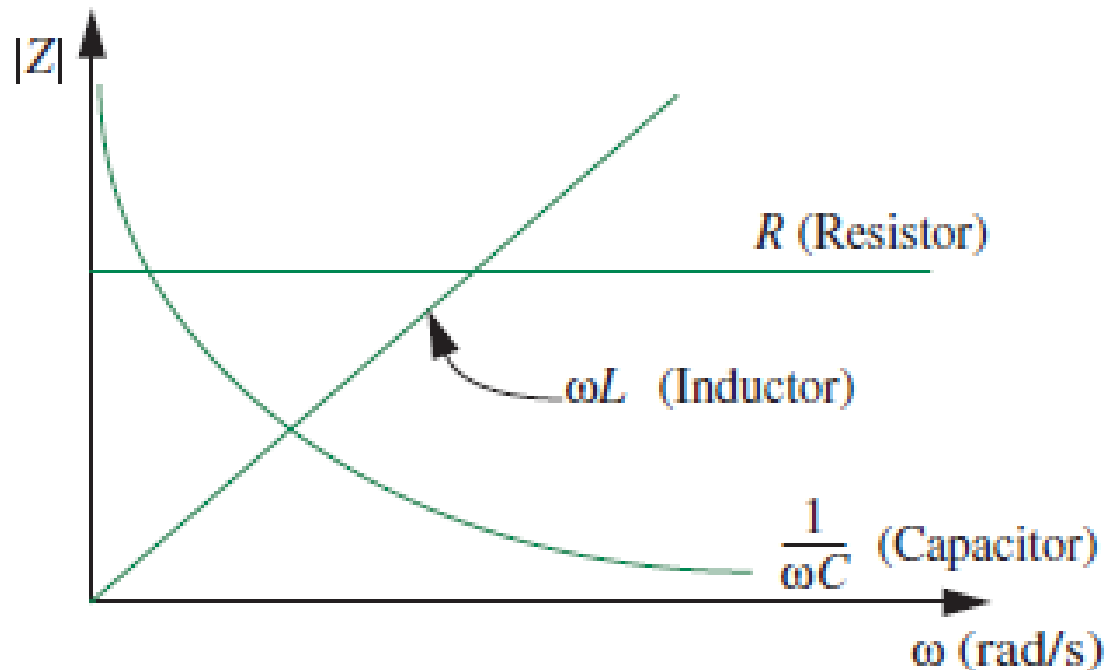
- Es un número complejo, NO es un fasor.
 - Unidades de ohm (complejos).

Impedancia

- Impedancia de R , L y C

$$Z_R = R \quad Z_L = j\omega L \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

- En general, depende de la frecuencia



Impedancia

- En un elemento lineal general (o su combinación)

$$Z = R + jX$$

- R y X números reales
- R se denomina “Resistencia”
- X se denomina “Reactancia”
 - $X > 0$ se denomina reactancia inductiva
 - $X < 0$ se denomina reactancia capacitiva



Impedancia

- Análogo de conductancia en AC: **Admitancia**

$$Y = \frac{1}{Z}$$

- Admitancia de elementos lineales

$$Y_R = \frac{1}{R} = G \quad Y_L = \frac{1}{j\omega L} \quad Y_C = j\omega C$$

$$Y = G + jB$$

- G y B números reales
- G se denomina “Conductancia”
- B se denomina “Susceptancia”



Impedancia

- ¿Qué ocurre con Kirchhoff en AC? Caso 1: KVL

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0$$

$$V_{m1}\cos(\omega t + \vartheta_1) + V_{m2}\cos(\omega t + \vartheta_2) + \dots + V_{mn}\cos(\omega t + \vartheta_n) = 0$$

$$\text{Re}(V_{m1}e^{j\omega t}e^{j\theta_1}) + \text{Re}(V_{m2}e^{j\omega t}e^{j\theta_2}) + \dots + \text{Re}(V_{mn}e^{j\omega t}e^{j\theta_n}) = 0$$

$$\text{Re}(V_{m1}e^{j\omega t}e^{j\theta_1} + V_{m2}e^{j\omega t}e^{j\theta_2} + \dots + V_{mn}e^{j\omega t}e^{j\theta_n}) = 0$$

$$\text{Re}\left((V_{m1}e^{j\theta_1} + V_{m2}e^{j\theta_2} + \dots + V_{mn}e^{j\theta_n})e^{j\omega t}\right) = 0$$

$$\text{Re}\left((\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2 + \dots + \tilde{V}_n)e^{j\omega t}\right) = 0$$

$$\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2 + \dots + \tilde{V}_n = 0$$



Impedancia

- Leyes de Kirchhoff en el dominio de la frecuencia
 - Las leyes de Kirchhoff son válidas en el dominio de la frecuencia, donde deben expresarse en forma fasorial
 - En cada lazo KVL $\sum_{m=1}^N \tilde{V}_m = 0$
 - En cada nudo KCL $\sum_{n=1}^N \tilde{I}_n = 0$
 - Por tanto, todas las técnicas de análisis estudiadas para DC pueden aplicarse a circuitos de alterna empleando fasores
 - En particular, combinaciones serie, paralelo, etc.



Impedancia

- Ej: Asociación de impedancias
 - Como la ley de ohm generalizada no cambia, ni Kirchhoff
 - Impedancias en serie

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots = \sum_{n=1}^N Z_n$$

- Admitancias (impedancias) en paralelo

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots = \sum_{n=1}^N Y_n \Rightarrow \frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots = \sum_{n=1}^N \frac{1}{Z_n}$$



Impedancia

- Ej: circuito RL con fuente de tensión sinusoidal

$$v_S = V_m \cos(\omega t) \quad \tilde{V}_S = V_m e^{j0} = V_m$$

– KVL a la malla

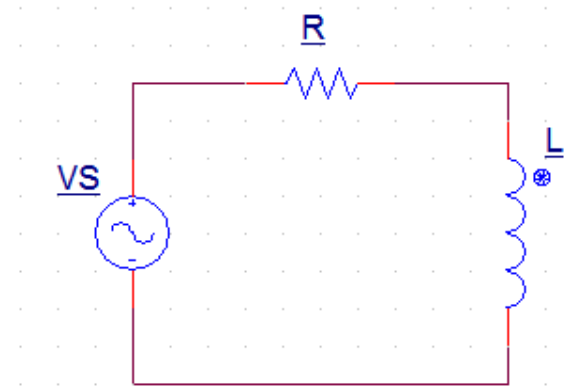
$$\tilde{V}_S = Z_R \tilde{I} + Z_L \tilde{I} = R \tilde{I} + j\omega L \tilde{I} = (R + j\omega L) \tilde{I}$$

$$\tilde{I} = \frac{V_m}{(R + j\omega L)} = \frac{V_m}{|Z| e^{j\beta}} = \frac{V_m}{|Z|} e^{-j\beta}$$

$$\begin{cases} |Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \\ \beta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \end{cases}$$

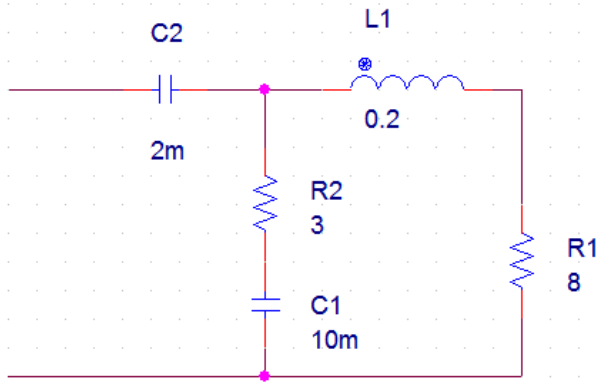
– Para pasar al dominio del tiempo

$$i(t) = \operatorname{Re}(\tilde{I} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}\left(\frac{V_m}{|Z|} e^{-j\beta} e^{j\omega t}\right) = \frac{V_m}{|Z|} \cos(\omega t - \beta)$$



Impedancia

- Ej: calcular la impedancia equivalente si $\omega = 50\text{rad/s}$



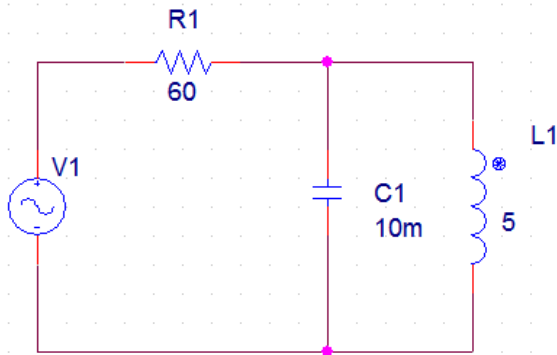
Análisis fasorial

- En resumen, para resolver un circuito en alterna se siguen los pasos
 1. Se transforma del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia (análisis fasorial).
 2. Se calculan las impedancias
 3. Se resuelve el circuito con las técnicas del Tema 1.
 4. Se transforma de vuelta la solución al dominio del tiempo.



Impedancia

- Ej: determinar la tensión en la bobina



$$V_1 = 20 \cos(4t - \pi/12)$$



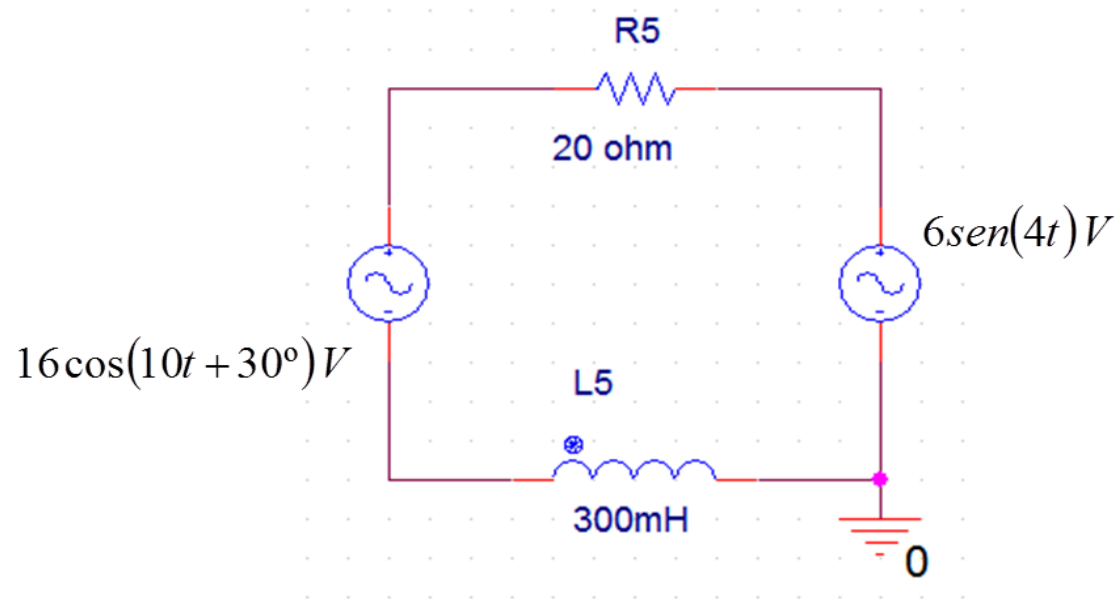
Análisis fasorial

- Circuitos equivalentes de Thévenin y Norton
 - El teorema de Thévenin se aplican también en AC
 - V_{oc} (ó V_{th}) es el voltaje (fasor) que aparece entre los terminales cuando B se desconecta
 - Z_{th} es la impedancia entre los terminales de A cuando todas las fuentes independientes se anulan (fuentes de tensión se cortocircuitan y fuentes de corriente en abierto)
 - Entonces, A se puede sustituir por una fuente de tensión real con $V_S = V_{oc}$ y $Z_{int} = Z_{th}$
 - El teorema de Norton también es aplicable
 - $I_N = V_{th} / Z_{th}$
 - $Z_N = Z_{th}$



Análisis fasorial

- Cuidado si hay frecuencias diferentes



Potencia

- Potencia instantánea

- Recordando el tema I, la potencia instantánea es el producto de $v(t)i(t)$
- Supongamos un circuito en régimen sinusoidal
- En una determinada parte del circuito

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

- Entonces $p(t) = v(t)i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \phi_v) \cos(\omega t + \phi_i)$
 - Aplicando la identidad $\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B))$
- Resulta $p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)$
 - Término constante + término dependiente del tiempo (frecuencia doble)



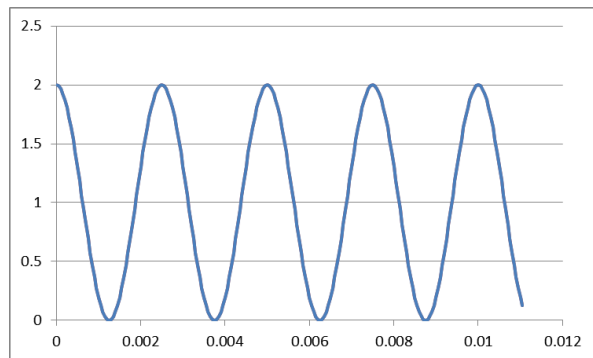
Potencia

- Potencia instantánea

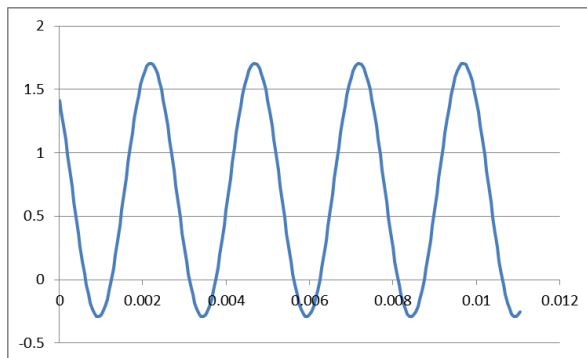
$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)$$

– Ej: $V_m = 4V$, $I_m = 0.5A$, $T = 5ms$, $\phi_v = 0$

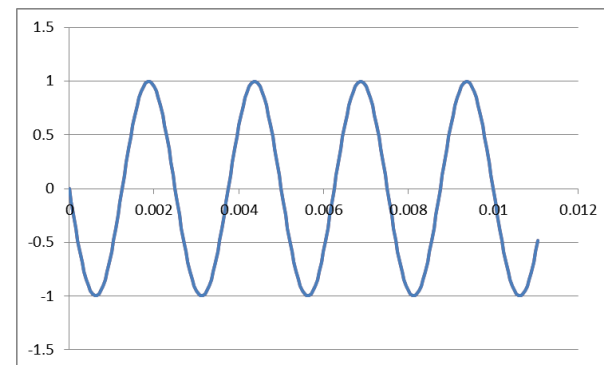
– $\phi_i = 0$



$\phi_i = \pi/4$



$\phi_i = \pi/2$



Potencia

- Potencia media, P

- Es el promedio de la potencia instantánea en un período

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

- Para señales de alterna

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) \right] dt = \\ &= \frac{V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i)}{2T} \underbrace{\int_0^T dt}_T + \frac{V_m I_m}{2T} \underbrace{\int_0^T \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) dt}_0 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i)$$

- Al término $\cos(\phi_v - \phi_i)$ se le denomina **factor de potencia**

Potencia

- Algunos casos particulares

- Circuito puramente resistivo (tensión y corriente en fase)

$$\phi_v = \phi_i \Rightarrow P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(0) = \frac{1}{2} V_m I_m$$

- Circuito puramente reactivo (L ó C)

$$\phi_v = \phi_i \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Potencia

- Potencia media, P

- Se puede calcular empleando fasores:

$$\tilde{V} = V_m e^{j\phi_v}$$

$$\tilde{I} = I_m e^{j\phi_i}$$

- Entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\tilde{V}.\tilde{I}^* &= \frac{1}{2}V_m e^{j\phi_v} I_m e^{-j\phi_i} = \frac{1}{2}V_m I_m e^{j\phi_v} e^{-j\phi_i} = \frac{1}{2}V_m I_m e^{j(\phi_v - \phi_i)} = \\ &= \frac{1}{2}V_m I_m [\cos(\phi_v - \phi_i) + j\text{sen}(\phi_v - \phi_i)]\end{aligned}$$

- Por tanto:

$$\text{Re}\left(\frac{1}{2}\tilde{V}.\tilde{I}^*\right) = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i) = P$$

Potencia

- Potencia media disipada, P

- En una carga general, Z_L

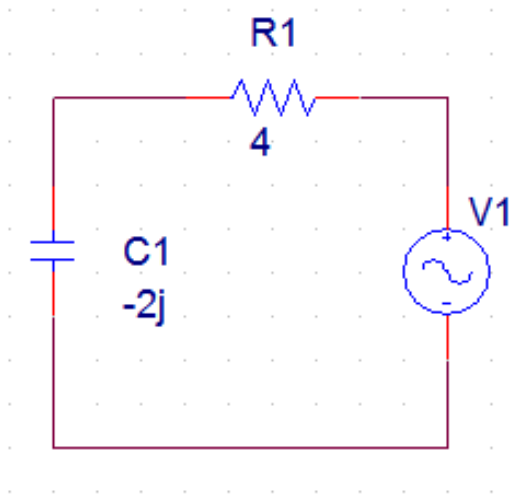
$$P = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\tilde{V}.\tilde{I}^*\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}Z_L\tilde{I}.\tilde{I}^*\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(Z_L|\tilde{I}|^2\right) = \frac{1}{2}|\tilde{I}|^2 \operatorname{Re}(Z_L) = \frac{1}{2}|\tilde{I}|^2 R_L$$

- Recordatorio: en DC $P = I^2 R$



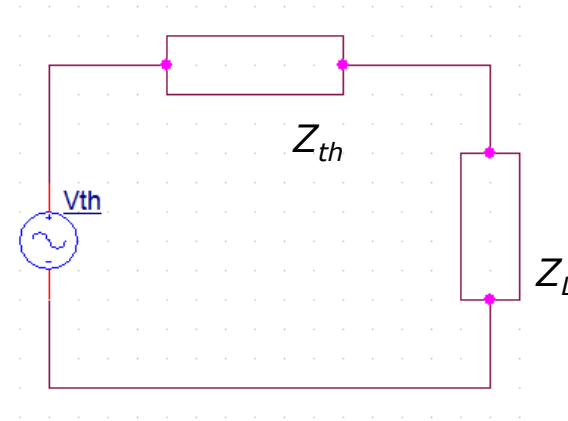
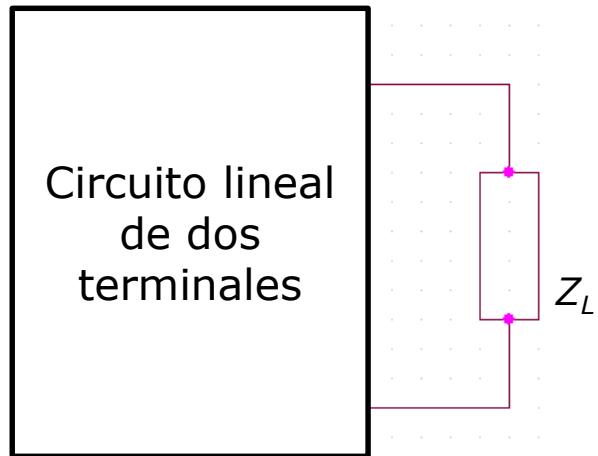
Potencia

- Ej: calcular potencias medias de la fuente y de la resistencia



Máxima transferencia de potencia

- Supongamos que un circuito está conectado a una impedancia “regulable” Z_L
 - ¿Cuándo se transmitirá la máxima potencia a la carga?



- *Spoiler*: máxima transferencia de energía cuando $Z_L = Z_{th}^*$

Potencia

- Para demostrarlo, partiremos del equivalente thèvenin

$$Z_{th} = R_{th} + jX_{th}; \quad Z_L = R_L + jX_L$$

- Corriente por Z_L :

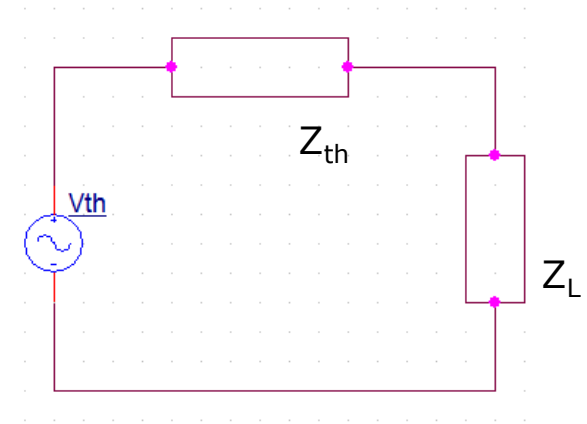
$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_{th}}{Z_L + Z_{th}}$$

- Potencia media en Z_L :

$$P = \frac{1}{2} |\tilde{I}|^2 R_L = \frac{1}{2} \frac{|V_{th}|^2 R_L}{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}$$

- Máximo: derivada nula

$$\frac{\partial P}{\partial X_L} = 0 \Rightarrow \frac{-|V_{th}|^2 R_L (X_{th} + X_L)}{[(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2]^2} = 0 \Rightarrow X_L = -X_{th}$$

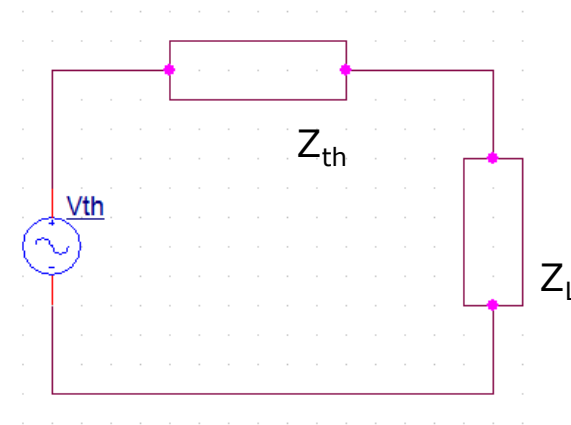


Potencia

- Potencia media en Z_L :

$$P = \frac{1}{2} |\tilde{I}|^2 R_L = \frac{1}{2} \frac{|V_{th}|^2 R_L}{(R_{th} + R_L)^2}$$

- Máximo: derivadas nulas



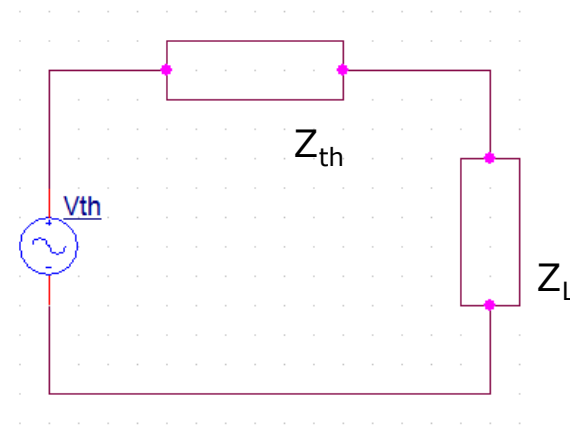
$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow \frac{|V_{th}|^2 \left[(R_{th} + R_L)^2 \right] - |V_{th}|^2 R_L 2(R_{th} + R_L)}{\left[(R_{th} + R_L)^2 \right]^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{th}^2 = R_L^2 \Rightarrow R_L = R_{th}$$

Potencia

- En conclusión, la potencia máxima se da:

$$\left. \begin{array}{l} R_L = R_{th} \\ X_L = -X_{th} \end{array} \right\} Z_L = Z_{th}^*$$



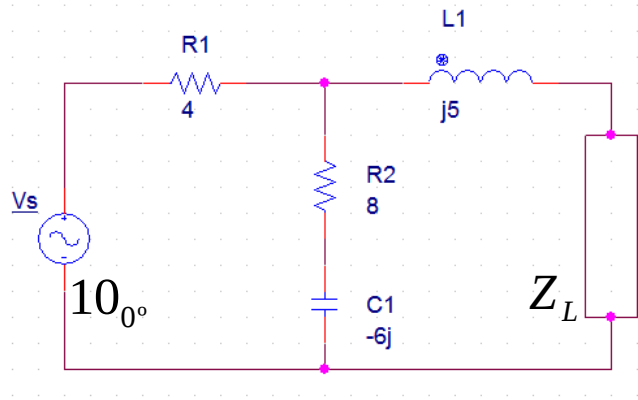
$$P_{\max} = \frac{R_L}{2} \frac{|V_{th}|^2}{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2} = \frac{R_{th}}{2} \frac{|V_{th}|^2}{(2R_{th})^2 + (0)^2} = \frac{R_{th}}{2} \frac{|V_{th}|^2}{4(R_{th})^2}$$

$$P_{\max} = \frac{|V_{th}|^2}{8R_{th}}$$



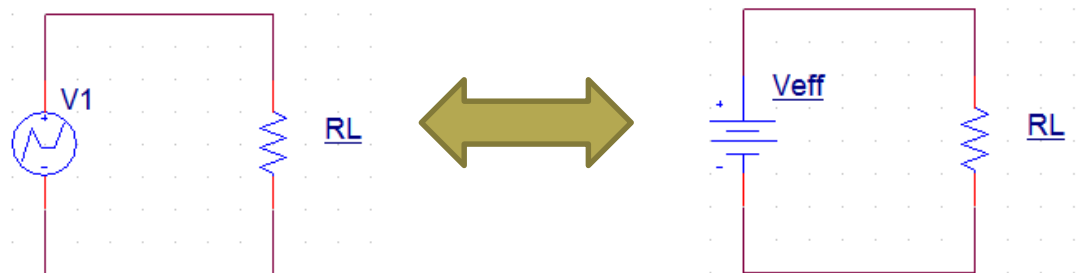
Potencia

- Determinar la impedancia de carga que maximiza la potencia media



Valor eficaz

- Utilizado para simplificar cálculos de potencia transmitida a una carga por una fuente periódica (no necesariamente sinusoidal)
 - El valor eficaz de tensión (o corriente) de una fuente periódica es el valor que de una fuente de DC que comunicara la misma potencia a una carga resistiva


$$P = \frac{1}{R} \frac{1}{T} \int_0^T V^2 dt$$
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_{eff}^2}{R} dt = \frac{V_{eff}^2}{R} \frac{1}{T} \int_0^T dt = \frac{V_{eff}^2}{R}$$
$$\frac{1}{R} \frac{1}{T} \int_0^T V^2 dt = \frac{V_{eff}^2}{R} \Rightarrow V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V^2 dt}$$

Valor eficaz

- Ej: fuente sinusoidal

$$\begin{aligned} V_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (V_0 \cos(\omega t))^2 dt} = V_0 \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt} = \\ &= V_0 \sqrt{\frac{1}{T} \frac{1}{\omega} \left(\frac{\omega t}{2} + \frac{\sin(2\omega t)}{4} \right) \Bigg|_0^T} = V_0 \sqrt{\frac{1}{T} \frac{1}{\omega} \frac{\omega T}{2}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = 0.707 V_0 \end{aligned}$$

- Corriente eficaz

- Razonamiento análogo

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt}$$

- Fuente sinusoidal $I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

Resonancia

- Coloquialmente: cuando a un sistema se le aplica una señal periódica y el sistema tiene un máximo de absorción de energía
 - Puede ser intencionada o no.
- Se dice que una red está en **resonancia** o es resonante si su voltaje y su corriente están en fase
 - Comportamiento puramente resistivo de la red.
 - Para que haya resonancia, si hay elementos reactivos debe haber al menos dos.
- Cuando está en resonancia la respuesta tiene la amplitud máxima

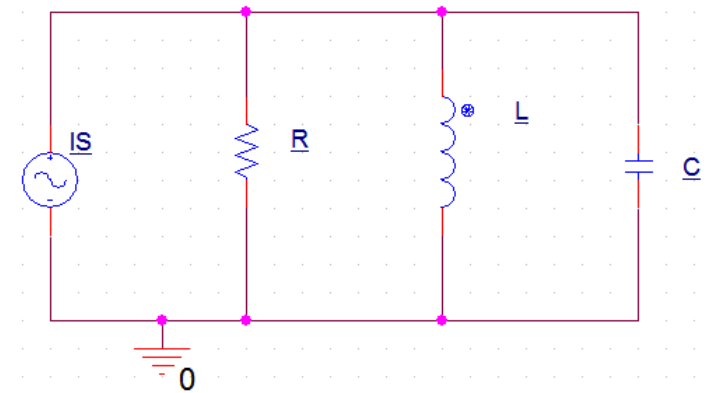


Resonancia

- Resonancia en el circuito RLC paralelo

- Sería equivalente a alimentar un L y C conectados a un generador de corriente sinusoidal
- Admitancia vista desde la fuente

$$Y = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$



- Habrá resonancia cuando la fuente vea comportamiento resistivo

$$j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad.s}^{-1} \quad \left(\text{ó } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ Hz} \right)$$

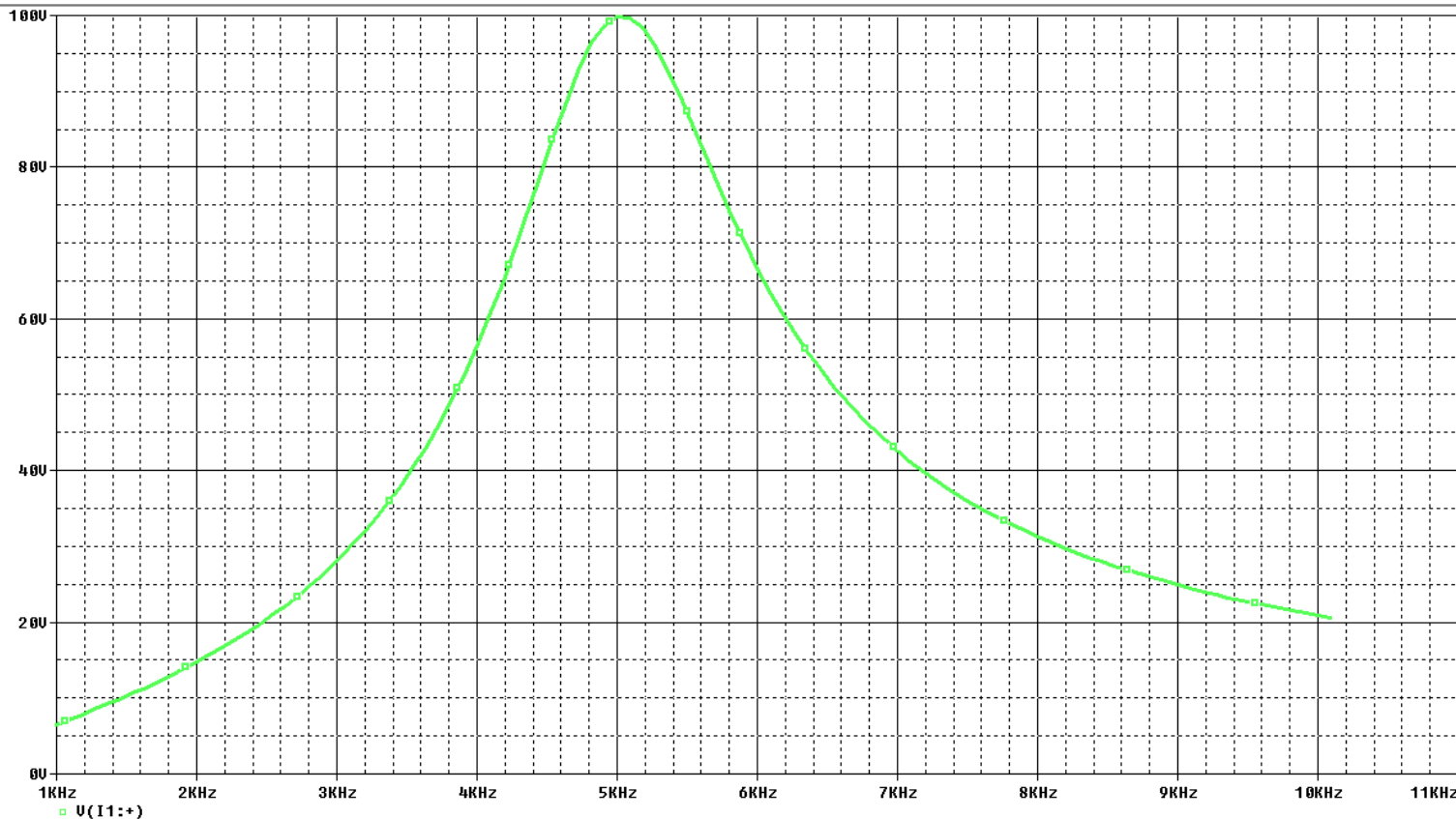
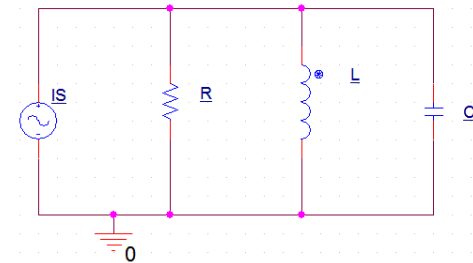
- El módulo de la admitancia es mínimo en la resonancia -> impedancia máxima -> máxima tensión

$$V_{out}(\omega_0) = I_S R$$

Resonancia

- Resonancia en el circuito RLC paralelo
 - Simulación con $R=100\Omega$, $I_S=1A$, $L=1mH$, $C=1\mu F$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 5.03 \text{ kHz}$$



Resonancia

- Que en resonancia la red tenga comportamiento resistivo no quiere decir que en C y L no haya corriente

$$\tilde{I}_L = \frac{\tilde{V}}{Z_L} = \frac{\tilde{I}R}{j\omega_0 L} \qquad \tilde{I}_C = \frac{\tilde{V}}{Z_C} = j\omega_0 C \tilde{I}R$$

- Como $\frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C$ entonces $\tilde{I}_C = -\tilde{I}_L = j\omega_0 CR \tilde{I} \Rightarrow \tilde{I}_C + \tilde{I}_L = 0$

- C y L se intercambian energía a la frecuencia de resonancia, y la corriente entre ellos puede ser (en módulo) superior a la de la fuente.



Resonancia

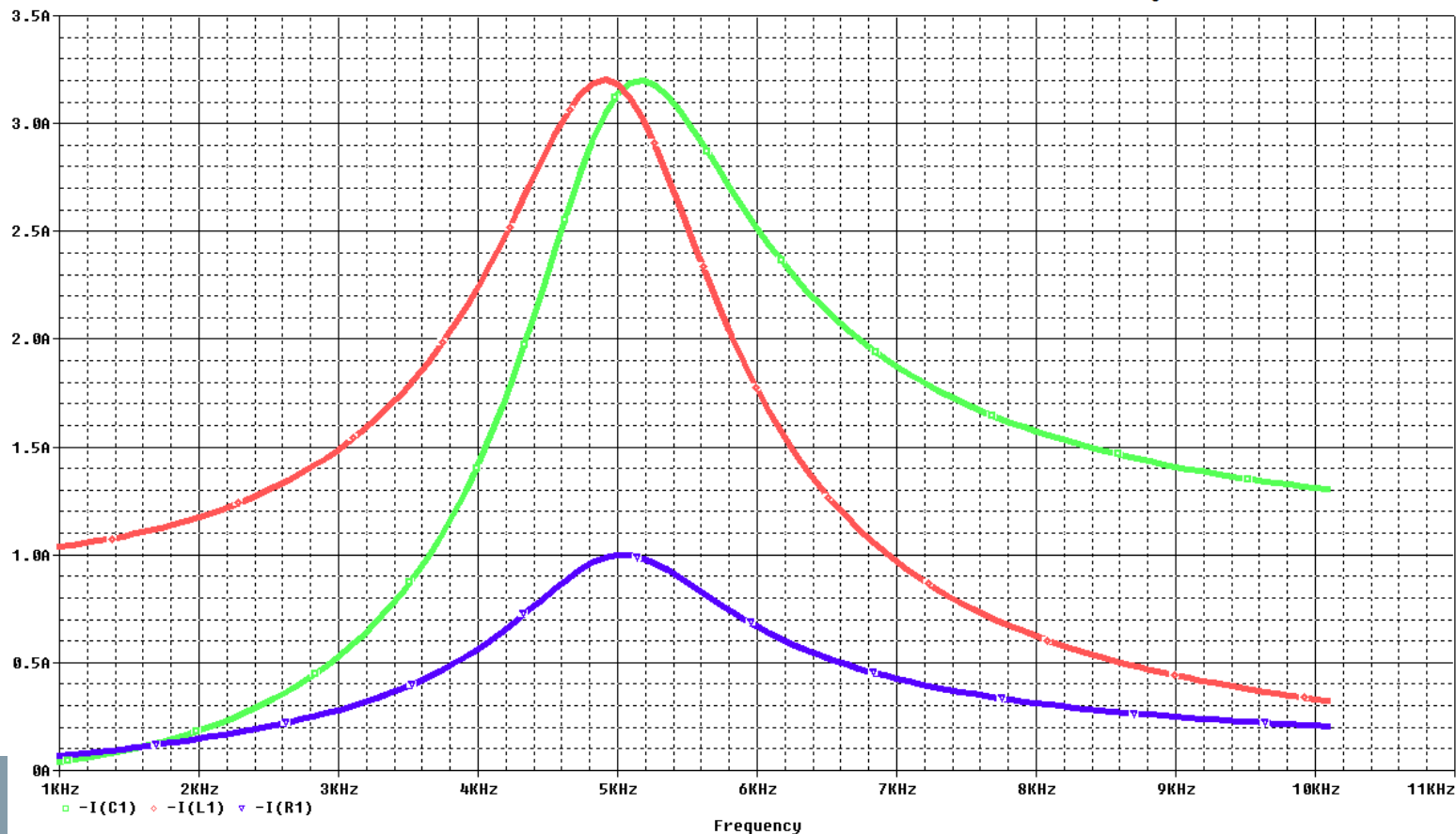
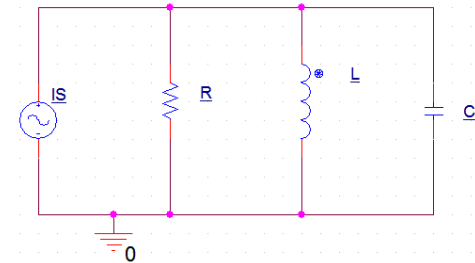
- Resonancia en el circuito RLC paralelo

- Simulación con $R=100\Omega$, $I_S=1A$, $L=1mH$, $C=1\mu F$

$$f_0 = 5.03 \text{ kHz}$$

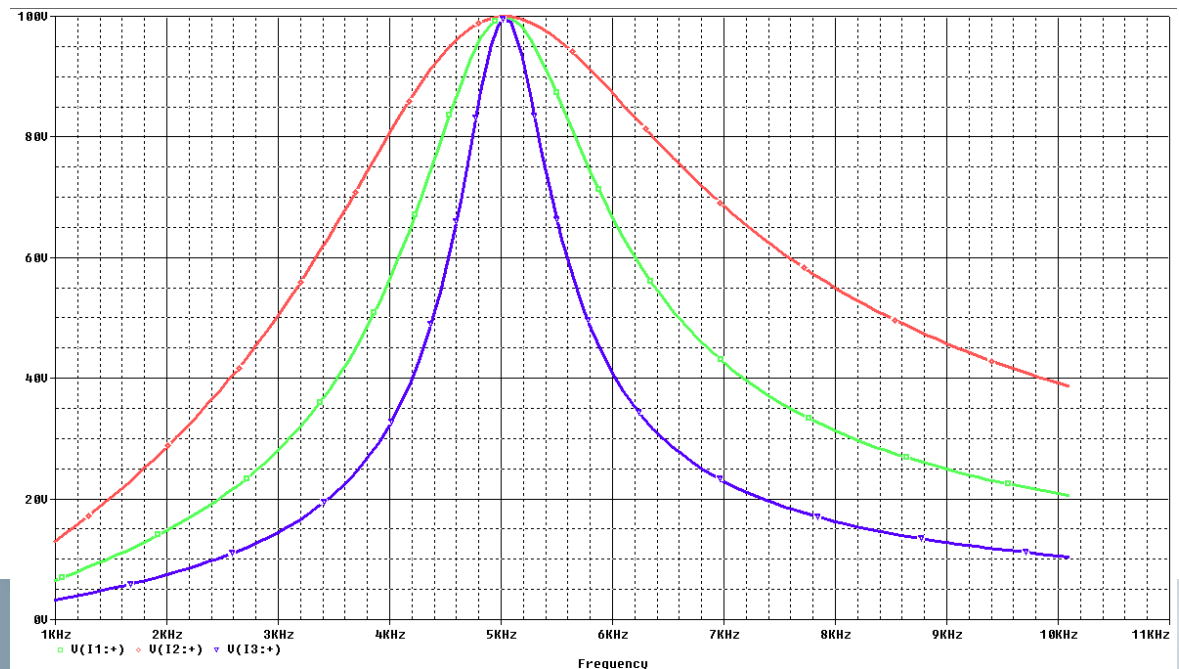
$$\omega_0 = 31.6 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\omega_0 C R I = 3.16 A$$



Resonancia

- V_{out} en resonancia depende solamente de R
- La "esbeltez" de la curva depende de C y L
 - Azul: $L/2, C*2$
 - Roja: $L*2, C/2$
- Cuanto más estrecha, mayor selectividad de la resonancia: **factor de calidad Q**



Resonancia

- Def: **factor de calidad** de un proceso resonante

$$Q = 2\pi \frac{\text{máx } E \text{ almacenada}}{E \text{ perdida por ciclo}}$$

- Un fenómeno naturalmente resonante típicamente $Q > 10$
 - P. ej: los rebotes de una pelota de golf $Q \sim 35$
- En nuestro caso la energía se almacena en C y L, y se disipa en la R
 - Circuito RLC paralelo máxima E en condensador: $\frac{1}{2} C V_{max}^2$
 - E disipada en un ciclo: $\frac{1}{2} \frac{V_{max}^2}{R} T$

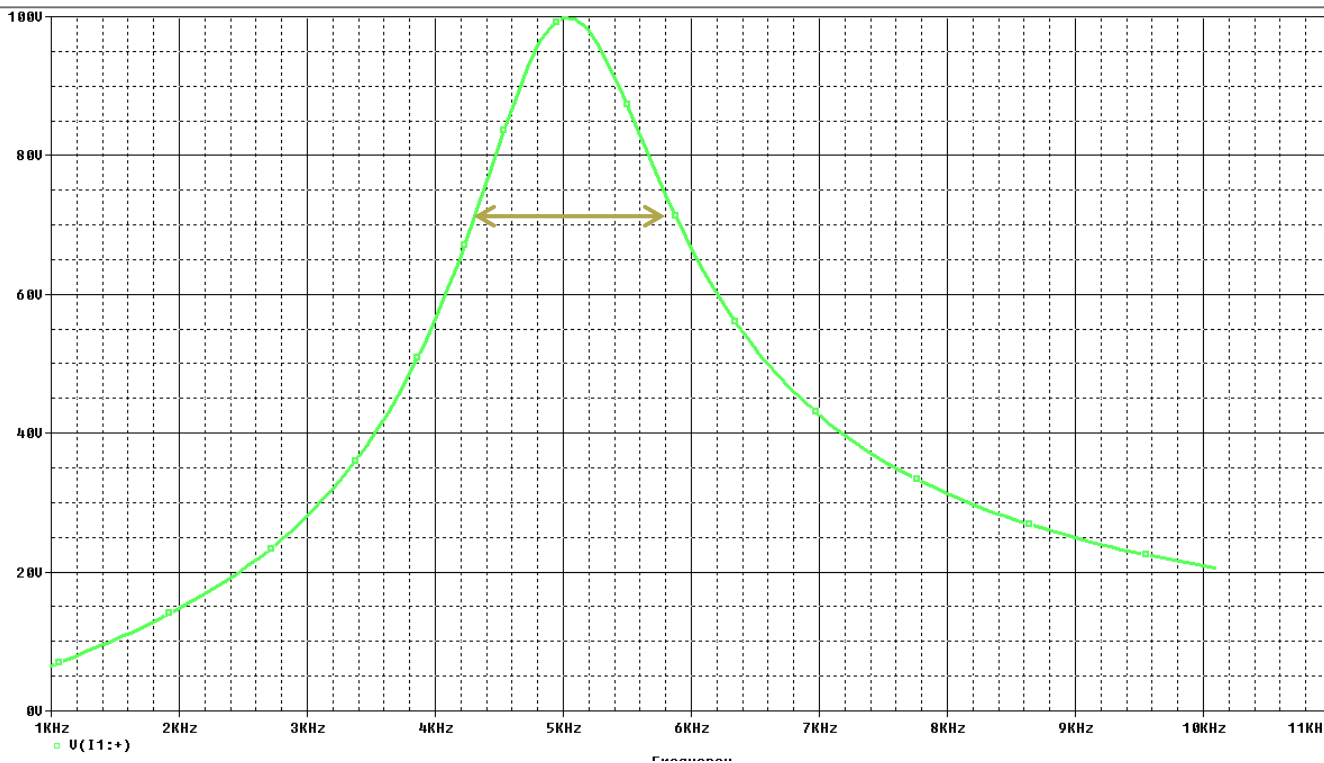
$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} C V_{max}^2}{\frac{1}{2} \frac{V_{max}^2}{R} T} \Rightarrow Q = \omega_0 R C = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

- Cuanto mayor sea Q mejor es el comportamiento como circuito resonante -> Más selectivo en frecuencia

Resonancia

- **Ancho de banda:** rango en el que $P_{out} \geq 0.5P_{max}$

– Potencia con cuadrado de $V \rightarrow$ ancho de banda en $V = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} = 0.707V_{max}$



$$\omega_1 = 4.3kHz$$

$$\omega_2 = 5.89kHz$$

$$BW = [4.3, 5.89]kHz = 1.59kHz$$



Resonancia

- Las frecuencias de corte se pueden calcular analíticamente (RLC paralelo)

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \pm \frac{\omega_0}{2Q}$$

- Cuanto mayor es Q menor es el ancho de banda

$$BW = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

- Para $Q > 10$ $\omega_{1,2} \approx \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right)$

- Resonancia en circuito serie es análoga
 - Se alimentaría con una fuente de tensión.



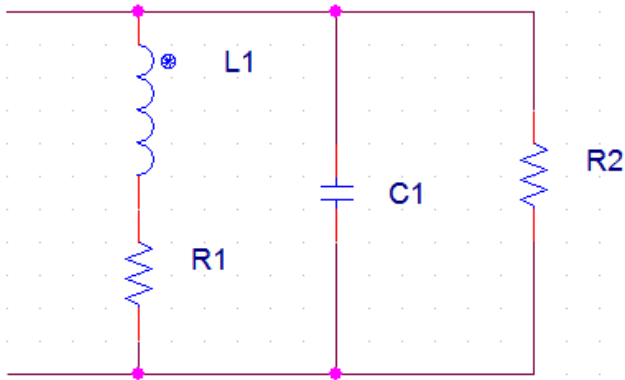
Resonancia

- Resumen de circuitos RLC resonantes

	Paralelo	Serie
Frecuencia de resonancia ω_0	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$
Factor de calidad Q	$\frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$	$\omega_0 RC = \frac{R}{\omega_0 L}$
Ancho de banda BW	$\frac{\omega_0}{Q}$	$\frac{\omega_0}{Q}$
Frecuencias de corte (media potencia)	$\omega_{1,2} = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \pm \frac{\omega_0}{2Q}$	$\omega_{1,2} = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \pm \frac{\omega_0}{2Q}$
Aprox. Para Q alto (>10)	$\omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right)$	$\omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right)$

Resonancia

- Ej: calcular la frecuencia de resonancia del circuito



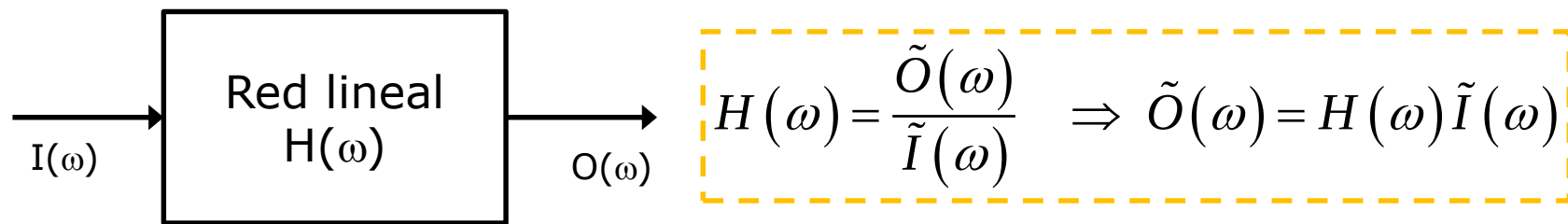
Filtros

- Los filtros llevan empleándose desde los comienzos de la ingeniería eléctrica
 - Eliminación (atenuación) de frecuencias indeseadas
 - Amplificación de rangos determinados de frecuencias
- Def: Un filtro es un circuito que se diseña para permitir el paso (o amplificar) un determinado rango de frecuencias y rechazar (o atenuar) el resto.
 - Diseñar un filtro que cumpla unas determinadas especificaciones es un tema complejo, solo vamos a realizar una pequeña introducción



Función de transferencia

- Herramienta para determinar la respuesta de un circuito frente a variedad de entradas.
 - En particular para analizar comportamiento de un filtro.
- $H(\omega) \equiv$ una magnitud *fasorial* (salida) del circuito dividida entre otra magnitud *fasorial* (entrada) en función de la frecuencia
 - I y O pueden ser voltajes o tensiones (o combinaciones)



- Es una función compleja (tiene módulo y fase)

Función de transferencia

- En circuitos lineales entrada y salida pueden ser tensiones o corrientes → 4 posibilidades

- Ganancia en tensión $H(\omega) = \frac{\tilde{V}_o(\omega)}{\tilde{V}_i(\omega)} = A_V$

- Ganancia en corriente $H(\omega) = \frac{\tilde{I}_o(\omega)}{\tilde{I}_i(\omega)} = A_I$

- Transferencia de impedancia $H(\omega) = \frac{\tilde{V}_o(\omega)}{\tilde{I}_i(\omega)}$

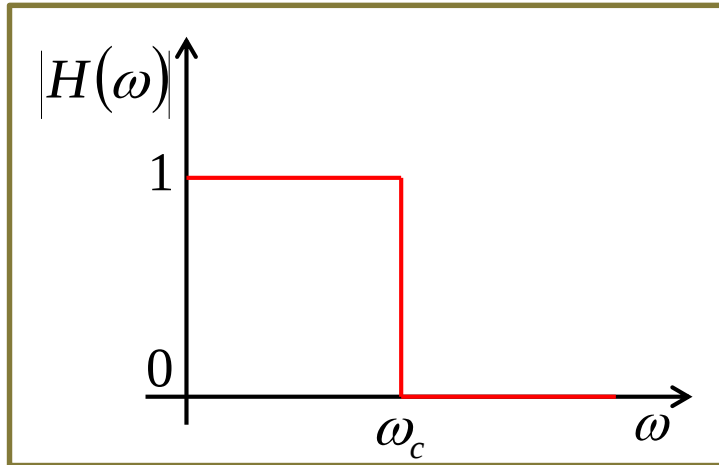
- Transferencia de admitancia $H(\omega) = \frac{\tilde{I}_o(\omega)}{\tilde{V}_i(\omega)}$



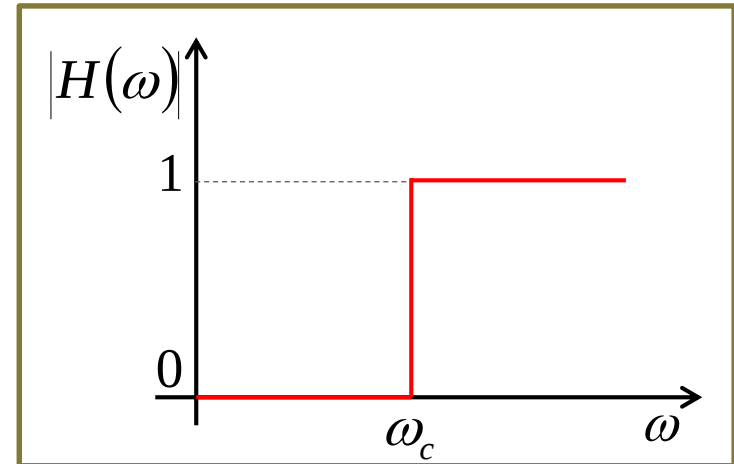
Filtros

- **Clasificación de filtros ideales**

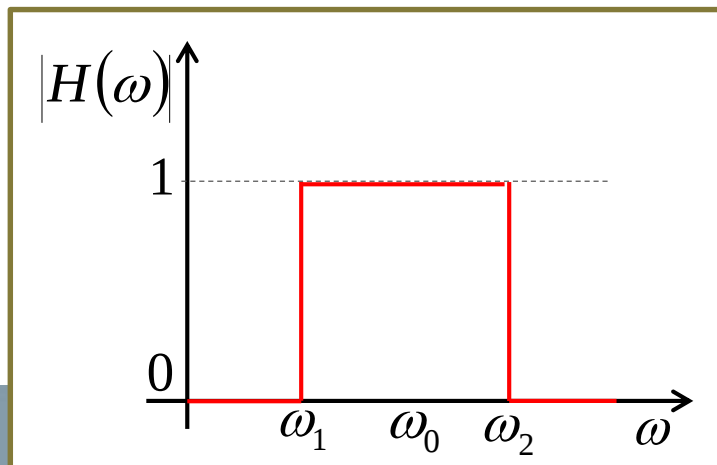
- **Filtro pasa-baja**



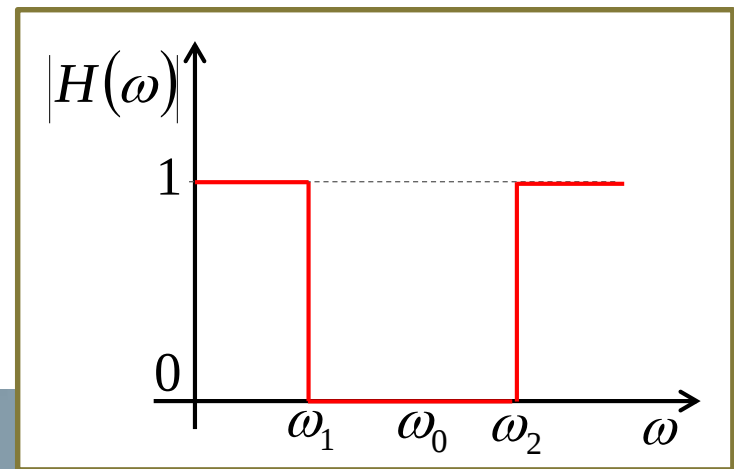
- **Filtro pasa-alta**



- **Filtro pasa-banda**

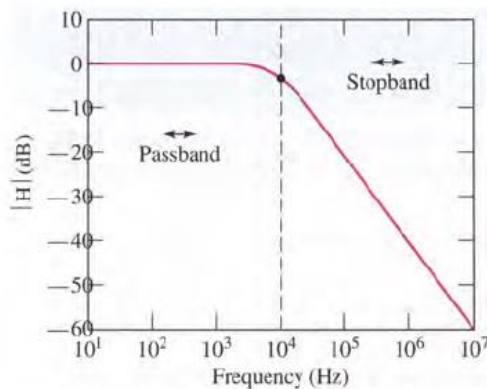


- **Filtro rechaza-banda**

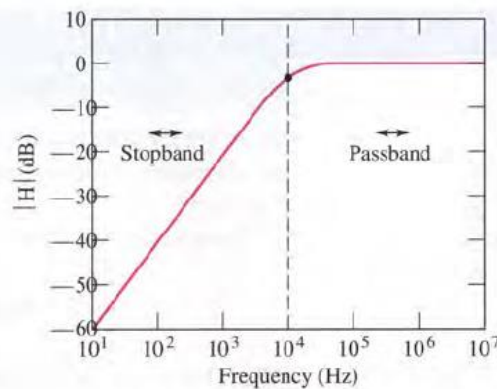


Filtros

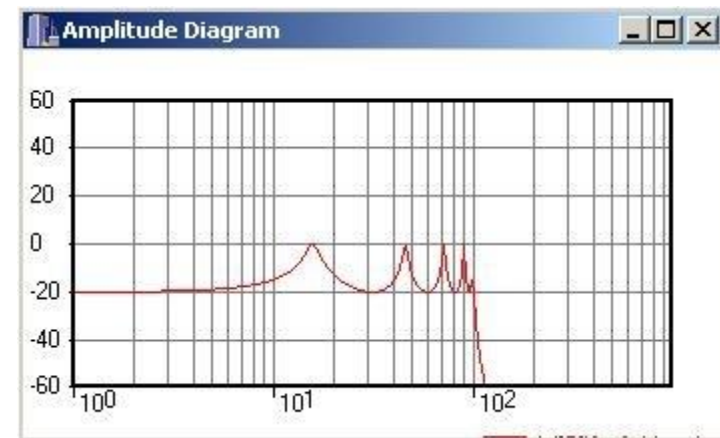
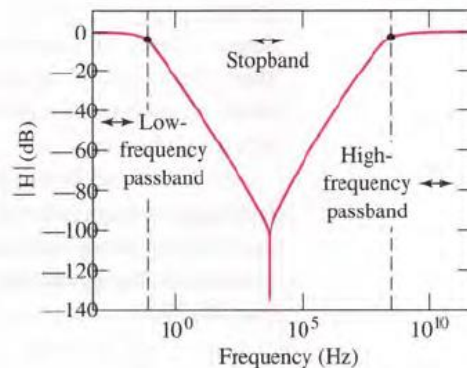
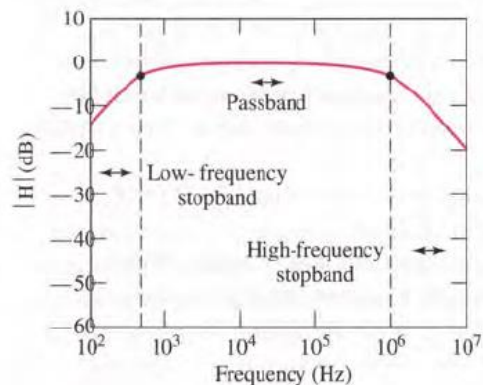
- Los filtros ideales son irrealizables.
 - Atenuación de la banda de paso
 - Parte de las frecuencias de rechazo no son filtradas
 - Rizado



(a)



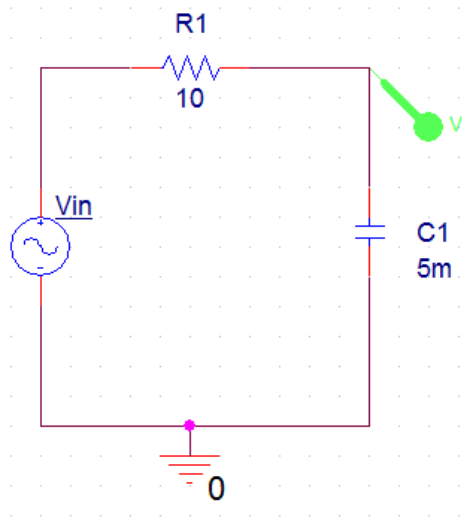
(b)



- Tipos de circuitos (analógicos) de filtrado
 - **Pasivos:** constan solamente de elementos pasivos (R , L ó C) y por tanto no puede producir amplificación.
 - Empleados desde hace unos 80-90 años...
 - En general necesitan inductancias (caras, pesadas y voluminosas) por lo que son difíciles de fabricar con circuitos integrados.
 - **Activos:** constan además de elementos activos (transistores, operacionales, etc.) por lo que pueden además amplificar señales.
 - Más sencillos de fabricar en un único circuito integrado

Función de transferencia

- Ej: obtener $A_V(\omega)$ del circuito RC y representar respuesta frente a señales sinusoidales



$$\left. \begin{aligned} Z_R &= R \\ Z_C &= \frac{1}{j\omega C} \end{aligned} \right\} \tilde{V}_o = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} \tilde{V}_i$$

$$A_V = \frac{\tilde{V}_o}{\tilde{V}_i} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

- Al pasarlo al dominio del tiempo habrá una atenuación y un desfase dependiendo de la frecuencia

Función de transferencia

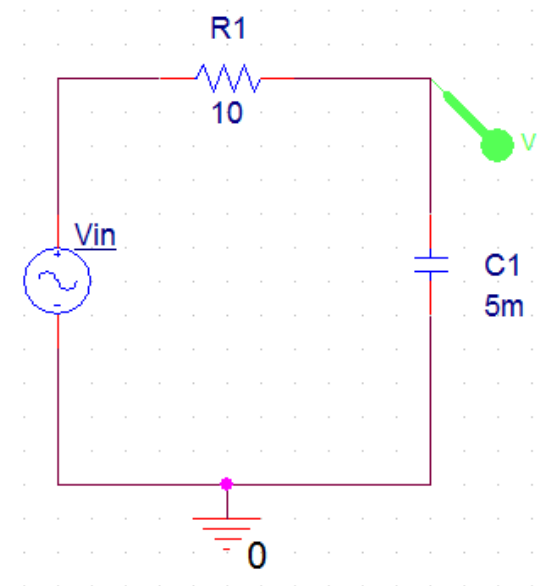
- Ej: obtener $A_V(\omega)$ del circuito RC y representar respuesta frente a señales sinusoidales

$$A_V = \frac{\tilde{V}_o}{\tilde{V}_i} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

- Representación: módulo y argumento (fase)

$$|A_V| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}$$

$$\arg(A_V) = -\arctg\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$



Función de transferencia

- Ej: obtener $A_V(\omega)$ del circuito RC y representar respuesta frente a señales sinusoidales
 - Manualmente: algunos puntos importantes
 - $\omega_c = 1/RC = 20 \text{ rad.s}^{-1} = 3.18 \text{ Hz}$

ω/ω_c	$ A_V $	ϕ
0	1	0
.5	0.89	-26.6°
1	0.707	-45°
2	.45	-63°
10	0.1	-84°
∞	0	-90°

$$|A_V| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}$$

$$\arg(A_V) = -\arctg\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$



Función de transferencia

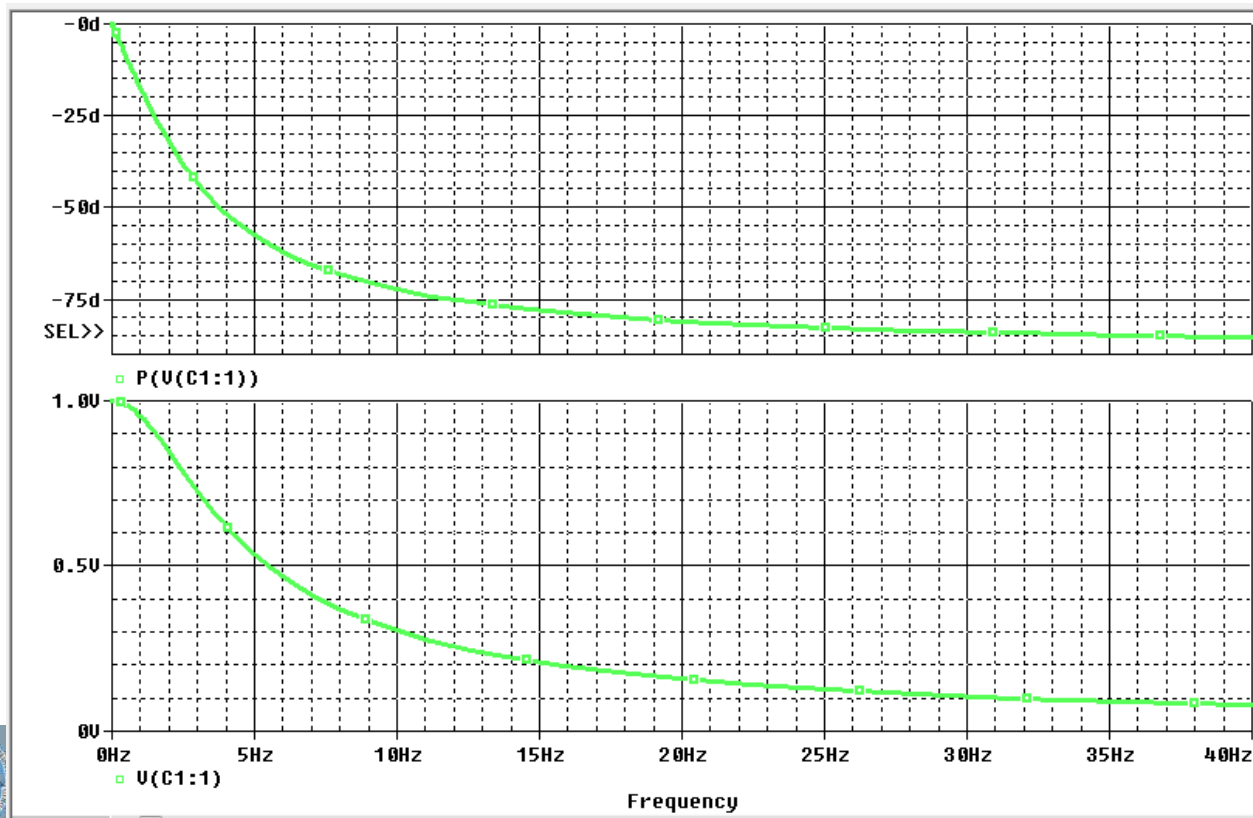
- Ej obtener $A_V(\omega)$ del circuito RC y representar respuesta frente a señales sinusoidales

– PSPICE

- $\omega_c = 1/RC = 20 \text{ rad/s}$ (3.18 Hz)

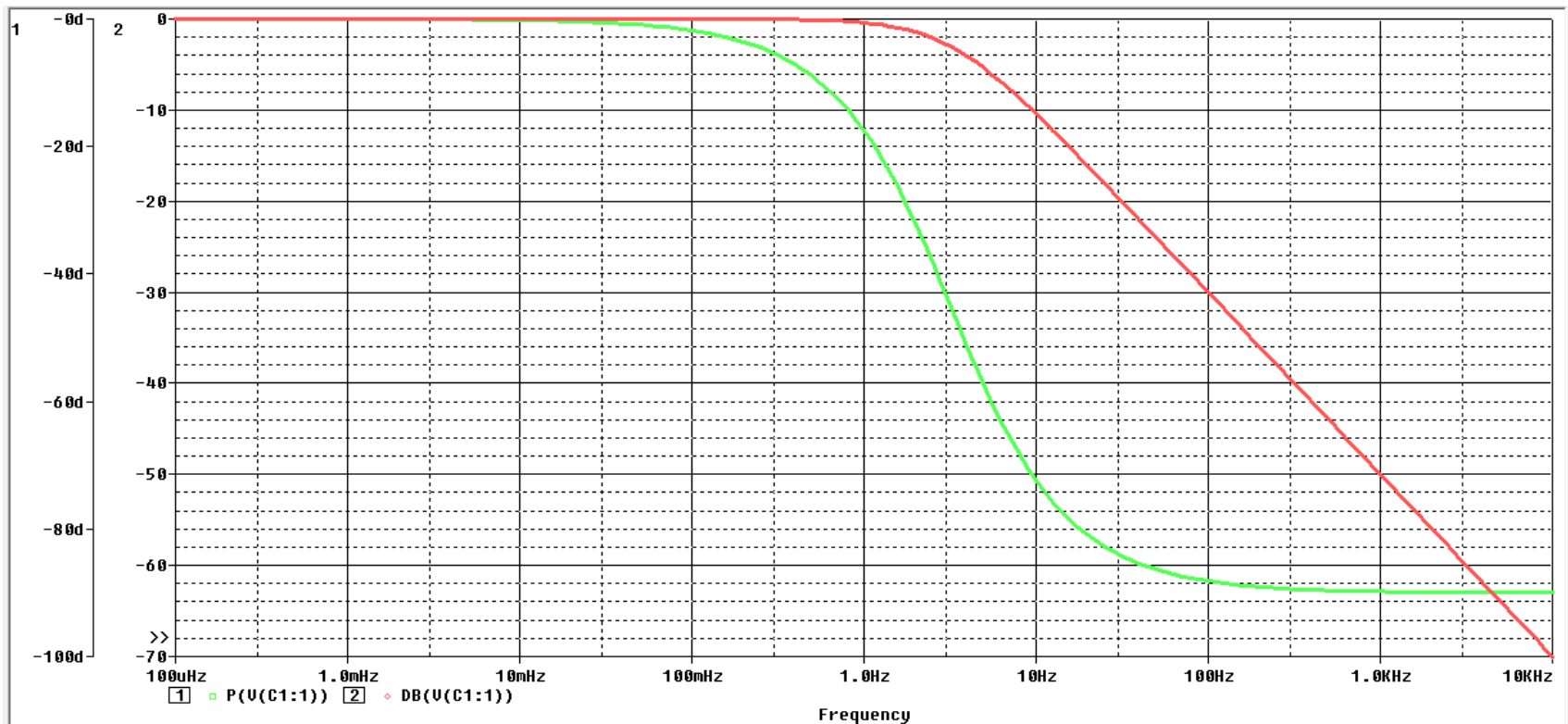
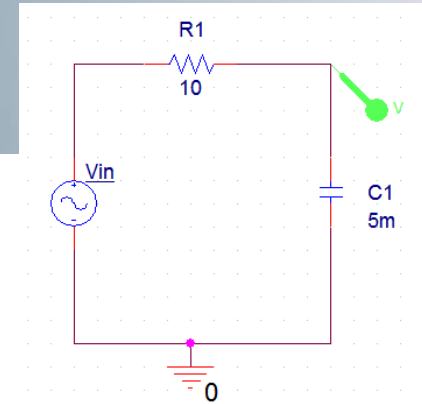
$$|A_V| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}$$

$$\arg(A_V) = -\arctg\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$



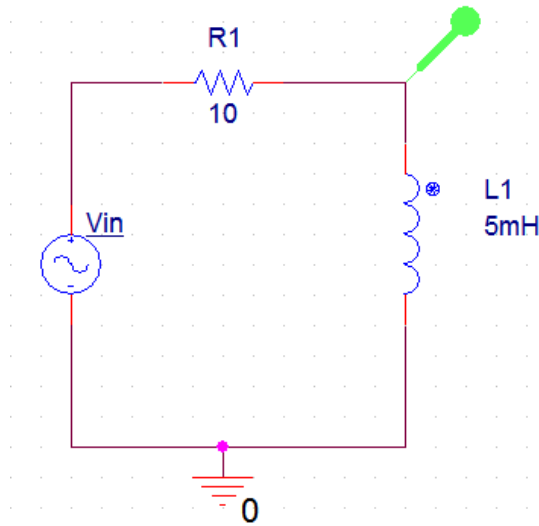
Filtros pasivos

- Filtro pasivo pasa-baja
 - Representación más visual: diagrama de Bode



Función de transferencia

- Ej: obtener $A_V(\omega)$ del circuito RL y representar respuesta frente a señales sinusoidales



$$\left. \begin{array}{l} Z_R = R \\ Z_L = j\omega L \end{array} \right\} \tilde{V}_o = \frac{Z_L}{Z_R + Z_L} \tilde{V}_i$$
$$A_V = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

Función de transferencia

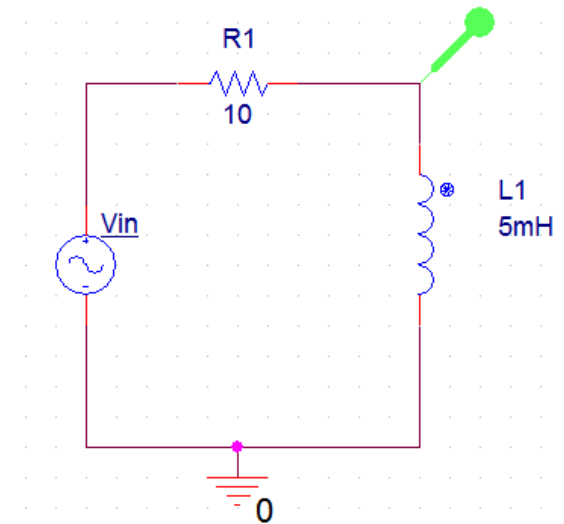
- Ej: obtener $A_V(\omega)$ del circuito RL y representar respuesta frente a señales sinusoidales

$$A_V = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

– Necesitamos representar módulo y argumento

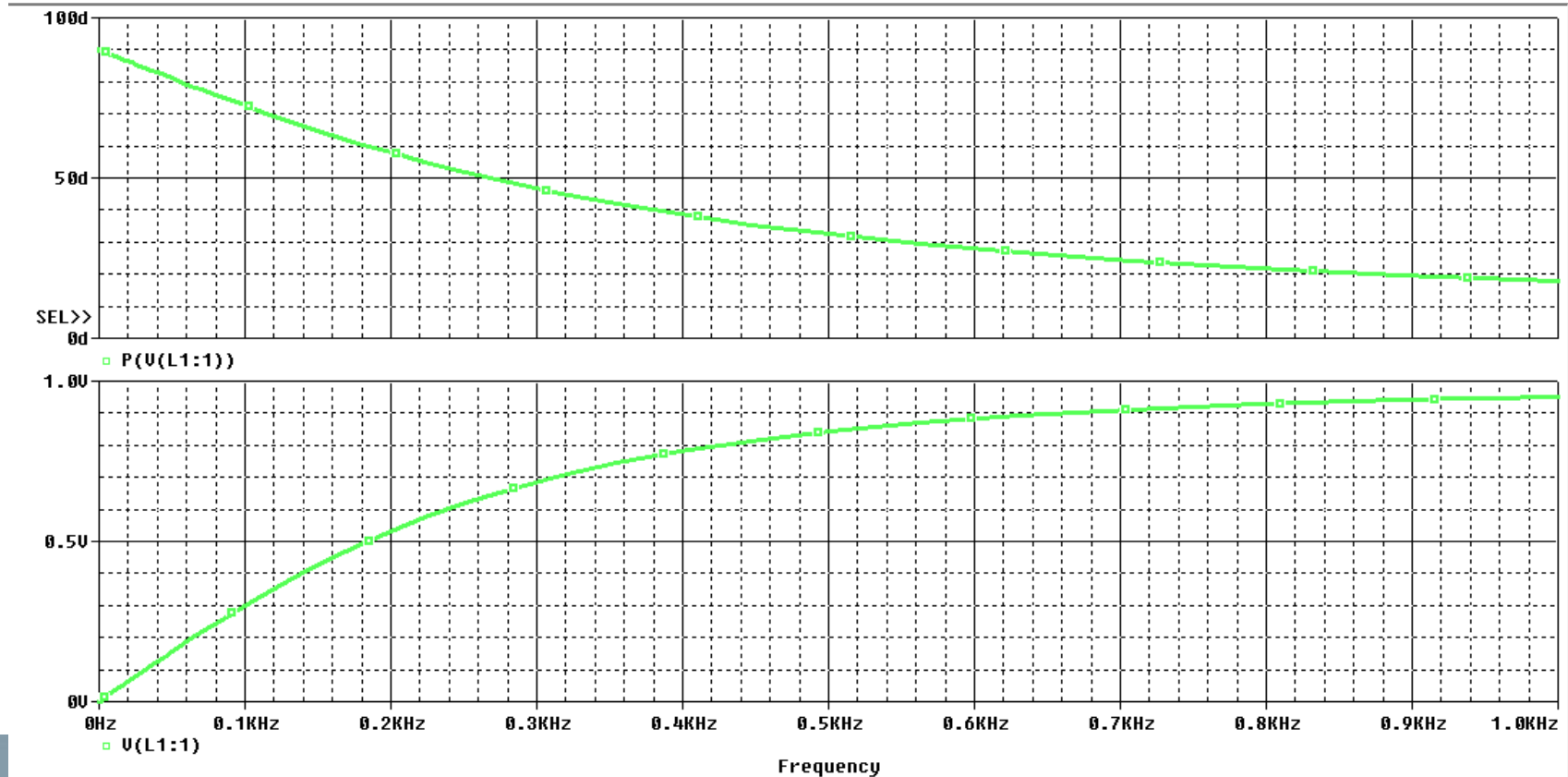
$$|A_V| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} \quad \left(\omega_c = \frac{R}{L} \right)$$

$$\arg(A_V) = 90^\circ - \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right) = 90^\circ - \arctg\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$



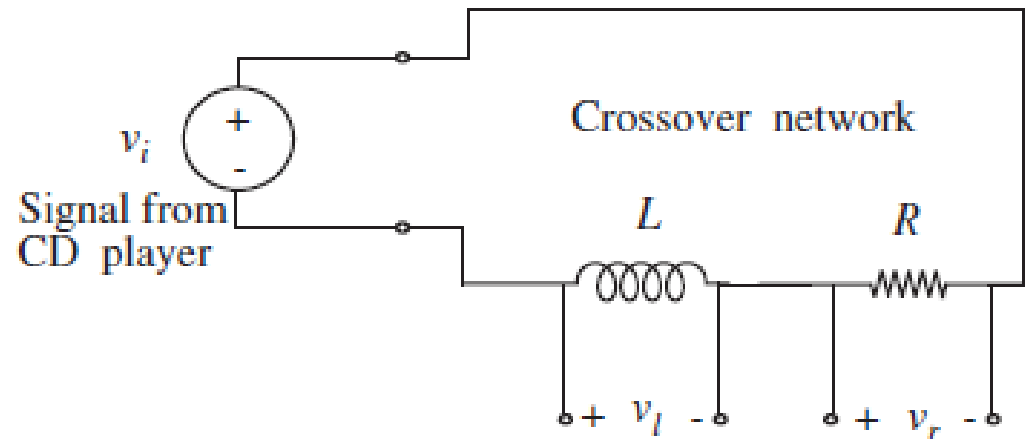
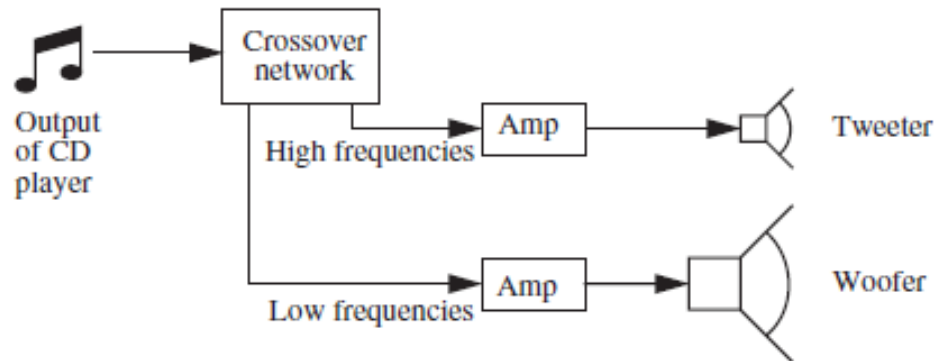
Función de transferencia

- Ej: obtener $A_V(\omega)$ del circuito RL y representar respuesta frente a señales sinusoidales
 - $\omega_c = R/L = 2000 \text{ rad.s}^{-1} = 318 \text{ Hz}$



Filtros pasivos

- Ejemplo de aplicación



Filtros pasivos

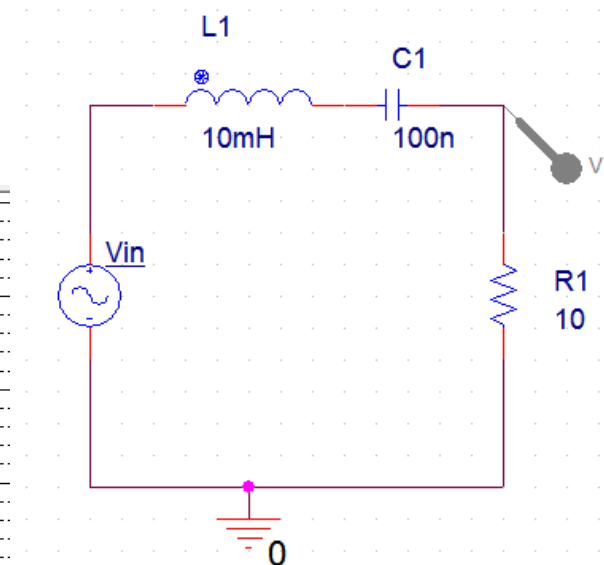
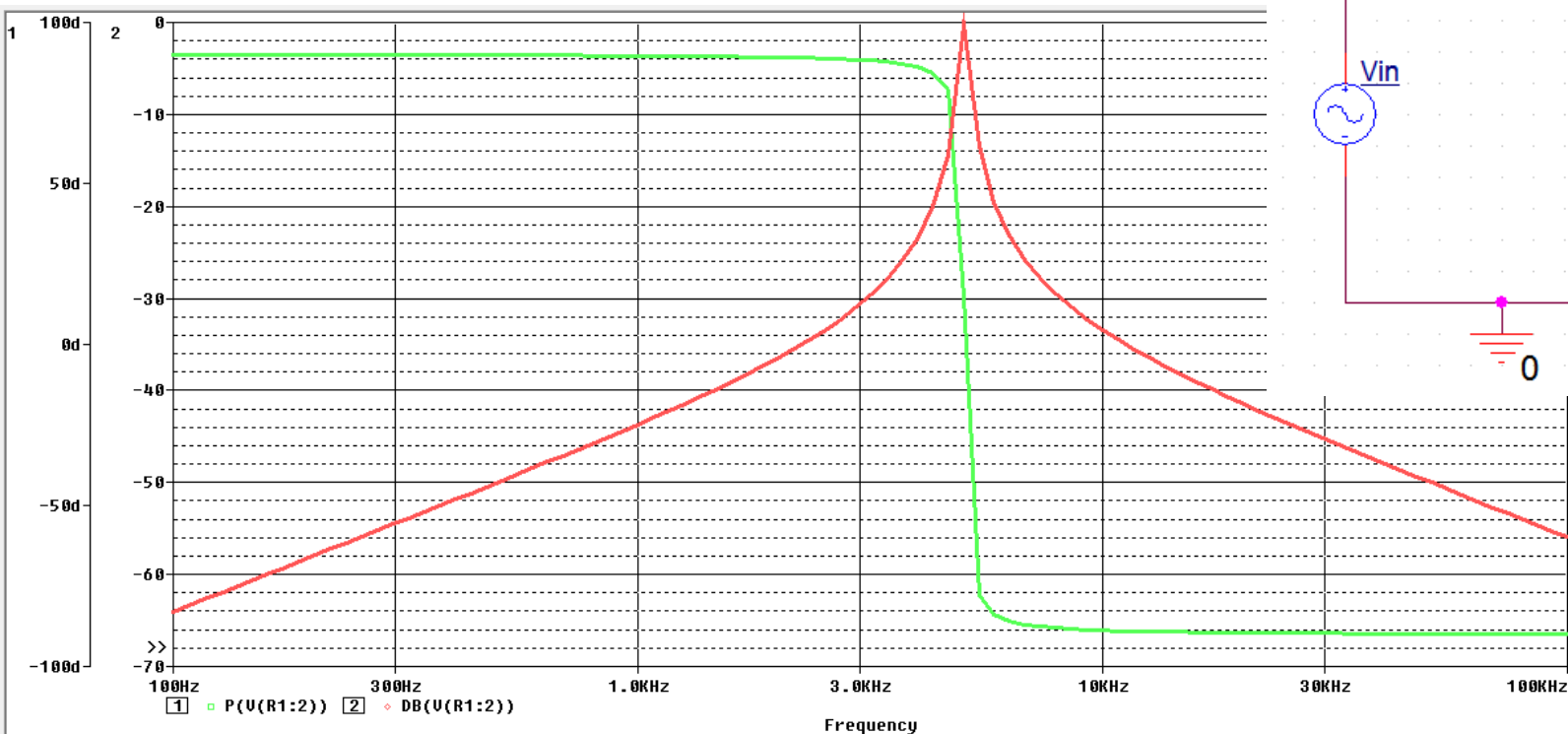
- En general en un filtro (habitualmente de V pero puede ser de I) se definen las **frecuencias de corte** como las frecuencias a las que el filtro atenúa un factor 0.707 respecto al máximo
 - Se corresponden con los puntos en los que la potencia es la mitad de la máxima
 - Pasa-baja y pasa-alta tienen una única frecuencia de corte
 - Pasa-banda y rechazo-banda tienen dos frecuencias de corte que determinan **el ancho de banda** ($\omega_2 - \omega_1$)
 - Además de la frecuencia de corte determinada, un buen filtro tiene una caída brusca y poco rizado.



Filtros pasivos

- Filtro pasa-banda

- Una posibilidad es combinar un pasa-baja en serie con un pasa-alta
 - No es lo ideal por necesitar muchos elementos y complejidad del cálculo de para un rango determinado
- Más habitual: circuito RLC (serie o paralelo)



Filtros pasivos

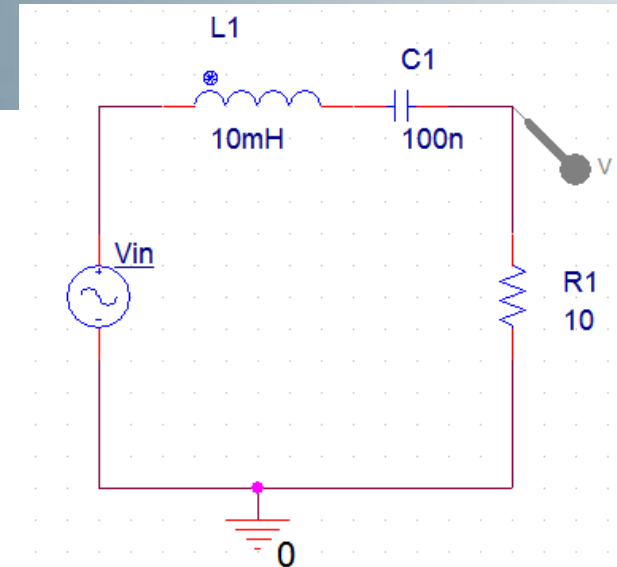
- Filtro pasa-banda

- circuito RLC serie

$$A_V = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \Rightarrow |A_V| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

- Para $\omega \rightarrow 0$, $A \rightarrow \omega RC \rightarrow 0$
- Para $\omega \rightarrow \infty$ $A \rightarrow R/\omega L \rightarrow 0$
- En las frecuencias centrales el filtro deja pasar la señal ($A > 0$)
- Tiene ganancia máxima 1 a la frecuencia de resonancia

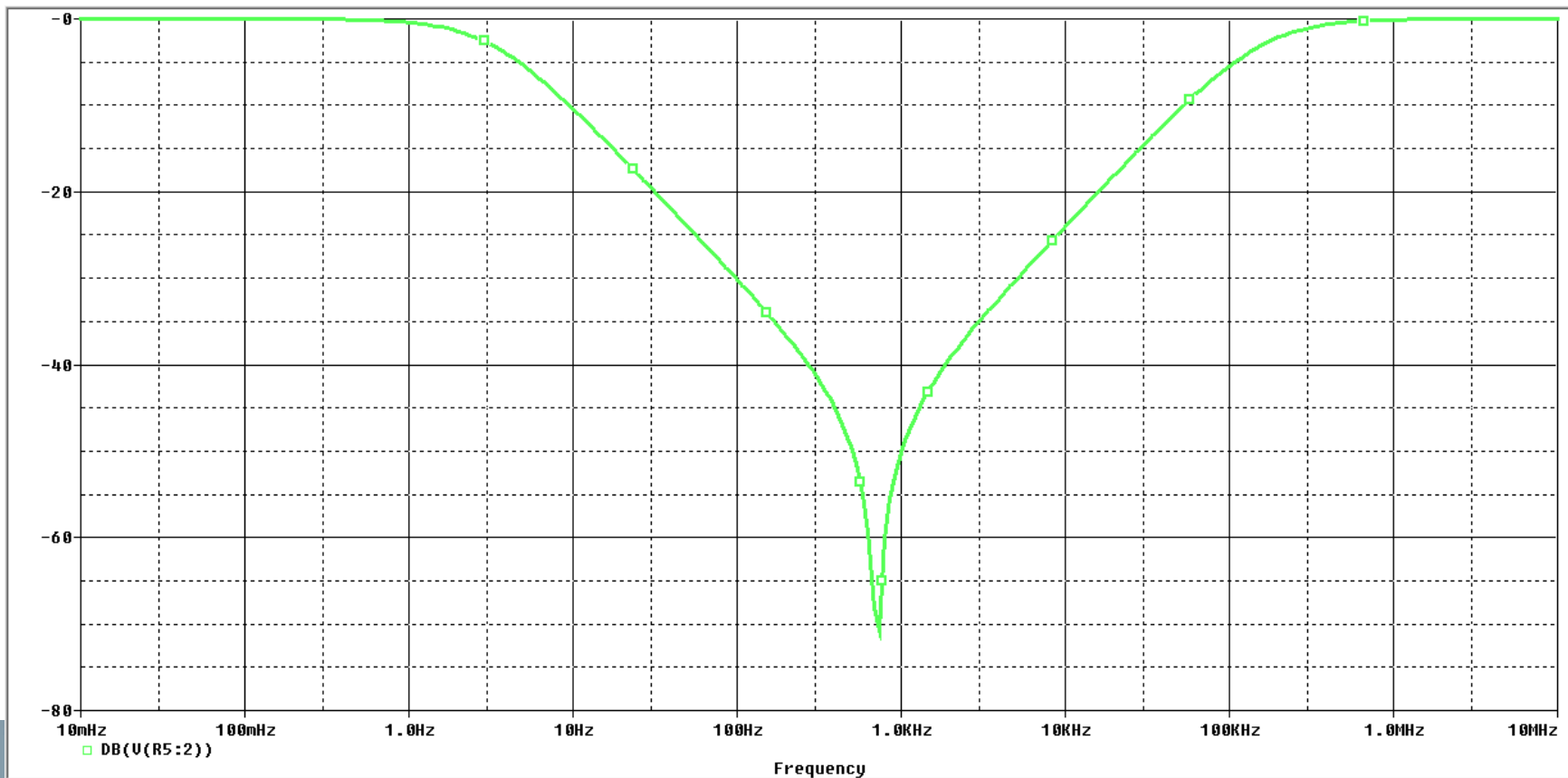
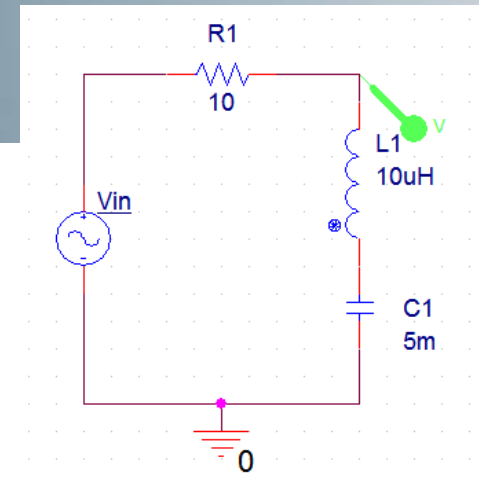
$$1 = \frac{\omega RC}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}$$
$$(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2 = \omega^2 R^2 C^2$$
$$(1 - \omega^2 LC) = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Filtros pasivos

- Filtro rechaza-banda

- Por ejemplo, tomando la salida entre L y C
 - Expresiones análogas a las anteriores



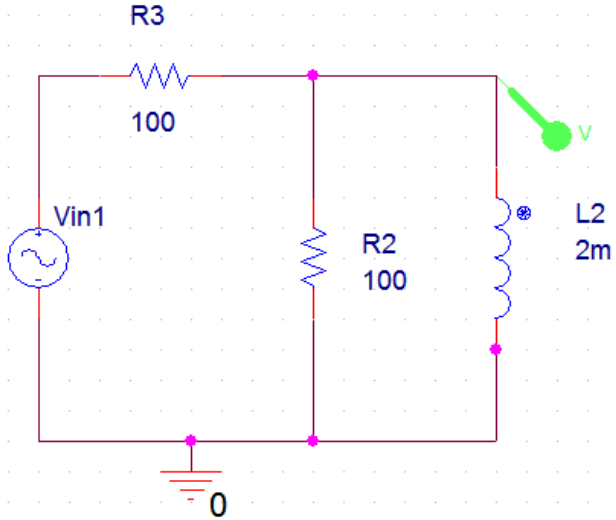
Filtros pasivos

- Conclusiones sobre los filtros pasivos
 - Su ganancia máxima es la unidad, no amplifican.
 - Su diseño no es único, existen diferentes opciones para un mismo criterio de diseño.
 - Los filtros que hemos visto son los más simples, con más elementos se pueden obtener funciones de transferencia más complejas.



Filtros pasivos

- Ej: determinar tipo de filtro y frecuencias de corte



Filtros activos

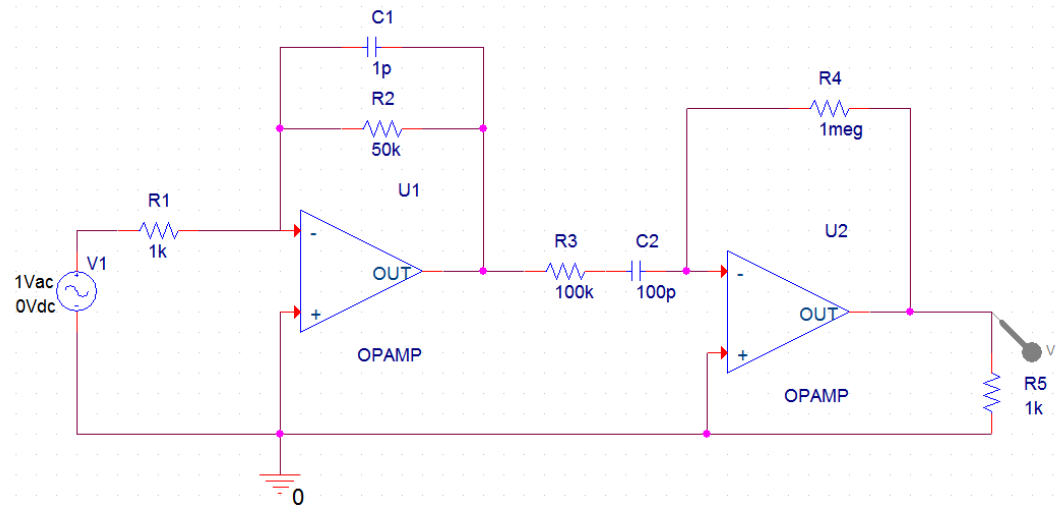
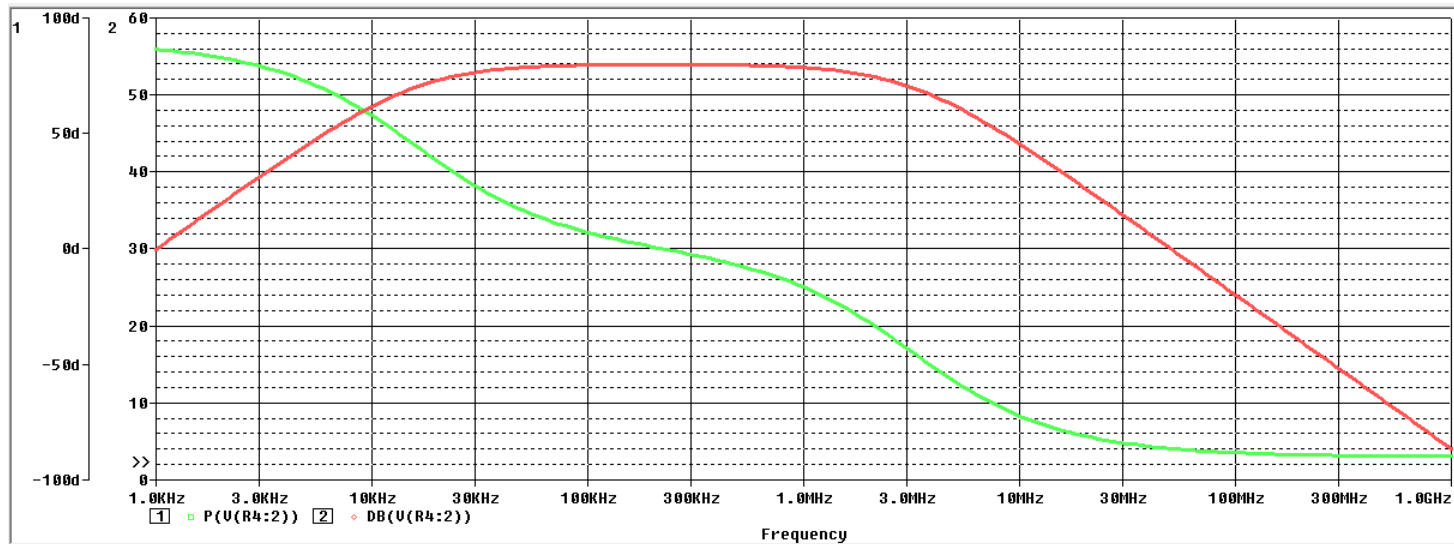
- Los filtros pasivos tienen limitaciones
 - Generalmente necesitan bobinas (voluminosas, caras y poco integrables)
 - Se comportan mal para frecuencias por debajo de la radiofrecuencia ($f < 3\text{kHz}$)
 - Por eso son útiles sobre todo a alta frecuencia
 - Difícil de controlar la ganancia en tensión
- Los filtros activos intentan superar estas limitaciones
 - Pueden ser más pequeños y baratos al evitar inductancias.
 - Se pueden integrar.
 - Pueden proporcionar ganancia de manera sencilla (unir filtrado y amplificación)
 - Se pueden combinar empleando amplificadores de aislamiento.
 - Es más sencillo el diseño en cascada



Filtros activos

- Ej. de filtro pasa-banda

- Se puede hacer una realización en cascada pasa-baja con pasa-alta



Objetivos del tema

- Hemos estudiado cómo se comportan los circuitos lineales frente a excitaciones sinusoidales
 - Fasores – impedancias
 - Potencia compleja
 - Concepto de resonancia, resonancia en circuitos
 - Introducción al filtrado de señales

Programa de la asignatura	
1.	Elementos de un circuito y métodos de análisis en corriente continua: Resistencias, fuentes de voltaje y de corriente, fuentes dependientes. Leyes de Kirchhoff. Técnicas de análisis: combinación de elementos, análisis por nodos, análisis por mallas, principio de superposición, teoremas de Thévenin y Norton. El amplificador operacional ideal. Circuitos simples con amplificadores operacionales. Análisis de circuitos asistido por ordenador.
2.	Análisis en el dominio del tiempo: Respuesta transitoria de circuitos con condensadores e inductancias. Circuitos de primer y segundo orden.
3.	Análisis en el dominio de la frecuencia: Excitación sinusoidal. Fasores. Impedancia. Potencia compleja. Resonancia. Introducción al filtrado de señales.
4.	Redes bipuerto: parámetros generales y transformaciones. Inductancias acopladas magnéticamente. Transformador lineal. Transformador ideal.
5.	Introducción a los circuitos no lineales.